Einführung in die Sonnenuhrenlehre

Grundwissen für angehen-
de Sonnenuhrenmacher

Louis-Sepp Willimann

Einführung in die Sonnenuhrenlehre: Grundwissen für angehende Sonnenuhrenmacher

Louis-Sepp Willimann

Inhaltsverzeichnis

Eine naive Sonnenuhr ... vii
1. Das Uhrwerk der Sonnenuhr ... 1
1.1. Unsere Reise durch das Sonnensystem ... 1
1.2. Unser Blick auf die Sonne ... 3
1.2.1. Unser Standort auf der Erde ... 3
1.2.2. Die scheinbare tägliche Bahn der Sonne ... 4
1.2.3. Die Lage der Tagesbahn im Jahresverlauf ... 7
1.2.4. Äquatorkoordinaten und Horizontkoordinaten ... 12
1.3. Die Tageszeiteinteilung ... 17
1.3.1. Die wahre Ortszeit ... 17
1.3.2. Die mittlere Ortszeit ... 18
1.3.3. Die mitteleuropäische Zonenzeit ... 20
2. Sonnenuhren mit Polstab ... 24
2.1. Der Schatten des Polstabes ... 24
2.2. Die Äquatorialsonnenuhr ... 25
2.2.1. Die äquatoriale Ringsonnenuhr ... 25
2.2.2. Ebene Äquatorialsonnenuhr ... 26
2.3. Die horizontale Sonnenuhr ... 27
2.3.1. Das empirische Verfahren ... 28
2.3.2. Das konstruktive Verfahren ... 30
2.3.3. Das rechnerische Verfahren ... 32
2.4. Die vertikale Sonnenuhr ... 34
2.4.1. Das empirische Verfahren ... 35
2.4.2. Das konstruktive Verfahren ... 37
2.4.3. Das rechnerische Verfahren ... 38
2.5. Die geneigte Sonnenuhr ... 43
3. Sonnenuhren mit punktförmigem Zeiger ... 45
3.1. Die Anzeige der Jahreszeit ... 45
3.1.1. Die äquatoriale Skaphensonnenuhr ... 45
3.1.2. Die ebene Sonnenuhr mit Deklinationslinien ... 50
3.2. Die Anzeige der mittleren Zeit ... 52
3.2.1. Das Problem ... 52
3.2.2. Die Zeigleichungsschleife ... 53
3.3. Die Mathematik der Sonnenstrahlen ... 59
3.3.1. Darstellung von Richtungen mit Vektoren ... 59
3.3.2. Richtungsvektoren im Äquatorsystem ... 66
3.3.3. Richtungsvektoren im Horizontsystem ... 69
3.3.4. Rechnen mit Richtungsvektoren ... 72
3.3.5. Beschreibung von Punkten mit Hilfe von Vektoren ... 76
3.4. Das Koordinatensystem des Zifferblattes ... 77
3.4.1. Das Zifferblattsysttem auf einem horizontalen Zifferblatt ... 79
3.4.2. Das Zifferblattsystem auf einem vertikalen Zifferblatt ... 82
3.4.3. Das Zifferblattsystem auf einem geneigten Zifferblatt ... 87
3.5. Die Berechnung der Sonnenuhr ... 87
3.5.1. Die Bestimmung des Sonnenstandes ... 88
3.5.2. Die Berechnung des Kugelschattens ... 90
3.5.3. Die praktische Berechnung einer Sonnenuhr ... 91
Literaturverzeichnis ... 101

Abbildungsverzeichnis

1. Naive Sonnenuhr vii
1.1. Die Erde im Planetensystem unserer Sonne 1
1.2. Die Bewegung der Erde im Sonnensystem 2
1.3. Die Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn 2
1.4. Die Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn 4
1.5. Sternspuren 5
1.6. Die örtliche Blickrichtung zum Himmelsnordpol 6
1.7. Tagesbahn der Sonne 7
1.8. Bahn der Erde um die Sonne 8
1.9. Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen am wahren Mittag an den Tagundnachtgleichen 9
1.10. Sonnenstände am beiden Tagundnachtgleichen 10
1.11. Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen am wahren Mittag des Sommersonnenwendtages 10
1.12. Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen am wahren Mittag des Wintersonnenwendtages 11
1.13. Stündliche Sonnenstände im Verlauf des Jahres 11
1.14. Stundenwinkel und Deklination der Sonne 13
1.15. Azimut a und Höhe h eines Objektes am Himmel 14
1.16. Der lokale oder wahre Mittag 18
1.17. Länge des Sonnentages 19
1.18. Graphische Darstellung der Zeitgleichung 20
2.1. Sonnenstände im Abstand von einer Stunde im Verlauf des Jahres 24
2.2. Wagenrad als Sonnenuhr 25
2.3. Konstruktion einer Äquatorialsonnenuhr 26
2.4. Ebenes Äquatorialzifferblatt 27
2.5. Zifferblatt einer horizontalen Sonnenuhr 28
2.6. Montierung des Polstabes für eine horizontale Sonnenuhr in Luzern 29
2.7. Zur Konstruktion des horizontalen Zifferblattes 30
2.8. Resultat der Umklappung im Grundriss 31
2.9. Umklappen der Äquatorebene in die Zifferblatttebene 31
2.10. Konstruktion des horizontalen Zifferblattes 32
2.11. Zur Berechnung des Zifferblattwinkels σ 33
2.12. Zifferblatt einer vertikalen, aus der Südorientierung nach Westen abweichenden Sonnenuhr 35
2.13. Montage des Polstabes einer aus der Südorientierung abweichenden Sonnenuhr 36
2.14. Kombination einer horizontalen und einer abweichend vertikalen Sonnenuhr 37
2.15. Montage des Polstabes bei einer abweichenden Sonnenuhr 39
2.16. Disposition zur Berechnung der Stundenlinie auf dem abweichenden Zifferblatt 41
2.17. Zifferblatt an einer abweichenden und geneigten Wand 44
3.1. Zeiger als Lochblende in Sonnenform 45
3.2. Äquatorialskaphe 46
3.3. Schatten des Punktzeigers am 20. März 47
3.4. Schatten des Punktzeigers am 21. April 48
3.5. Der Schatten des Punktzeigers im Tagesverlauf 48
3.6. Die Skala derÄquatorialskaphe 49
3.7. Äquatoriale Skaphensonnenuhr 50
3.8. Schnitt der Schattenkegel mit einer Wand 50

3.9. Vertikale, 20° nach Westen abweichende Sonnenuhr 52
3.10. Horizontale Méridienne im ancien collège des Jésuites in Pruntrut. 54
3.11. Die Zeitgleichung 55
3.12. Die Zeitgleichungsschleife 56
3.13. Diese an einer nach Süden orientierten, vertikalen Wand angebrachte Sonnenuhr zeigt die wahre und die mittlere Ortszeit an. 57
3.14. Diese an einer nach Süden orientierten, vertikalen Wand angebrachte Sonnenuhr zeigt die wahre und die mitteleuropäische Winter- und Sommerzeit in Luzern an. 58
3.15. Beschreibung der Richtung zur Sonne mit zwei Winkeln 59
3.16. Beschreibung der Richtung zur Sonne mit Pfeilen 60
3.17. Darstellung der Sonnenrichtung mit zwei Richtungswinkeln oder mit einem Richtungsvektor 63
3.18. Bestimmung des Azimutes aus einem Richtungvektor 65
3.19. Horizont- und Äquatorsystem 67
3.20. Horizont- und Äquatorsystem von Osten her betrachtet 70
3.21. Die Ausrichtung eines Zifferblattes 77
3.22. Das Horizont- und das Zifferblattkoordinatensystem 78
3.23. Horizontales Zifferblatt 79
3.24. Vertikales Südzifferblatt 82
3.25. Übergang von der vertikalen Südsonnenuhr zur vertikalen abweichenden Sonnenuhr 83
3.26. Berechnung des Kugelschattens 86
3.27. Zifferblatt mit Mittagslinie 94
3.28. Zifferblatt mit Mittagslinie und Steinbocklinie 97
3.29. Zifferblatt mit Mittagslinie, Steinbocklinie und Zeitlgleichungsschleife für 10 Uhr MEZ 99

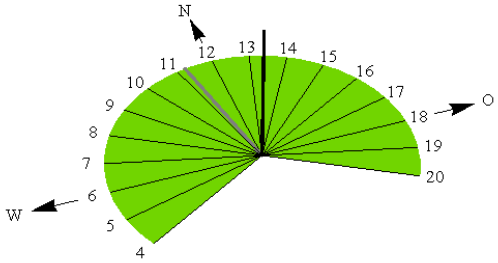
Tabellenverzeichnis

1.1. Kulmination der Sonne 12
2.1. Zifferblattwinkel für die vollen Stunden wahrer Ortszeit auf einem horizontalen Zifferblatt in Luzern 34
3.1. Eintritt der Sonne in die Tierkreise 51
3.2. Korrespondenzen zwischen dem Horizont und dem Äquatorsystem 68
3.3. Umrechnung von Äquatorkomponenten in Komponenten eines vertikalen Zifferblattes 92

Eine naive Sonnenuhr

Auf den ersten Blick scheint es einfach, eine schmucke Gartensonnenuhr zu bauen: Auf einer ebenen, gut besonnten Fläche stecke man einen Stab senkrecht in die Erde, ziehe einen Kreis um den Stabfusspunkt und teile den Kreis vom Nordpunkt aus wie eine Torte in 24 gleiche Sektoren ein. Den Nordpunkt bezeichnen wir mit 12 Uhr und nummerieren von da aus die Sektorgrenzen noch Westen abwärts und nach Osten aufwärts.

Abbildung 1. Naive Sonnenuhr



An einem sonnigen Tag Mitte Februar um 12:00 Uhr Mittags machen wir die Kontrolle. Zu unserer Enttäuschung zeigt unsere Sonnenuhr etwa 11.15 Uhr an, geht also etwa eine Dreiviertelstunde nach.

Am 15. Juli wiederholen wir das Experiment. Wenn die Armbanduhr 12:00 Uhr mittags anzeigt, zeigt unsere Sonnenuhr ganz kurz nach 9 Uhr an. Gut, wir haben jetzt natürlich Sommerzeit und unsere Sonnenuhr ist für die Winterzeit konstruiert. 9 Uhr Winterzeit wäre aber 10 Uhr Sommerzeit. Wie sind die zwei weiteren Stunden Nachgang zu erklären?

Wir wiederholen unser Experiment gleichentags um 20:00 Uhr; nach Normalzeit wäre 19:00 Uhr. Jetzt zeigt unsere Sonnenuhr ca. 19:20 Uhr und geht somit plötzlich um fast 20 Minuten vor, nachdem sie am Mittag noch um etwa zwei Stunde nachgegangen war!

Was haben wir falsch gemacht? In der vorliegenden Abhandlung lernen Sie, wie es richtig gemacht wird. Zu diesem Zweck studieren wir im 1. Kapitel die astronomischen Grundlagen, die für das Verständnis der Funktionsweise von Sonnenuhren notwendig oder mindestens nützlich sind. Im 2. Kapitel wenden wir uns den Polstabuhren zu, welche die wahre Ortszeit anzeigen. Im 3. Kapitel schliesslich studieren wir dann Sonnenuhren mit punktförmigem Schattenwerfer, welche die Anzeige von mitteleren Zeiten (z.B. unsere mitteleuropäische Zeit) mit Hilfe von Analemmaschleifen sowie der Jahreszeit in Form von Tierkreislinien ermöglichen.

Dieses Skript habe ich als Unterlage zu einem Seminar, welches ich an der Senioren-Universität Luzern hielt, geschrieben. Entsprechend dem Zielpublikum habe ich versucht, den mathematischen Apparat möglichst gering zu halten. Einfache algebraische Sekundarschulkenntnisse sind aber in jedenfalls nützlich. Im Kapitel 2 über Polstabsonnenuhren werden dann auch die trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan verwendet. Wer diese Voraussetzungen nicht mitbringt, kann das Kapitel aber trotzdem mit Gewinn studieren, denn ich habe bei jedem besprochenen Sonnenuhrtyp jeweils drei Verfahren vorgeführt: Ein experimentelles, welches bloss handwerkliches Geschick erfordert, ein konstruktives, welches ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen voraussetzt und schliesslich ein rechnerisches Verfahren, in dem die trigonometrischen Funktionen verwendet werden.

Auch für den Entwurf von Sonnenuhren mit punktförmigem Schattenwerfer gibt es im Prinzip verschiedene Vorgehensweisen. Ich habe mich hier für einen Weg mit Vektorrechnung entschieden, wobei ich jedoch diesbezüglich keine Vorkenntnisse voraussetze. Die notwendigen, einfachen Konzepte aus der Vektorrechnung werden anhand der konkreten Bedrüfnisse für Sonnenuhren erarbeitet, was nach meiner Einschätzung auch jenen Leserinnen und Lesern, welche in der Schule von der manchmal trockenen und abstrakten Materie abgeschreckt worden sind, einen Verständnisgewinn bringen dürfte.

Kapitel 1. Das Uhrwerk der Sonnenuhr

Um die oben beobachteten Phänomene verstehen zu können, müssen wir ein wenig in die Astronomie, und zwar in die Mechanik des Sonnensystems eintauchen.

1.1. Unsere Reise durch das Sonnensystem

Seit dem Jahre 1609 wissen wir es. In seinem Hauptwerk *Astronomia Nova* hat Johannes Kepler (1571-1630) gestützt auf Vorarbeiten von Nikolaus Kopernikus (1473-1543) und auf das reiche Beobachtungsmaterial von Tycho Brahe (1546-1601) zeigen können, dass sich die Erde und die übrigen Planeten auf ebenen, ellipsenförmigen Bahnen um die Sonne bewegen, wobei sich die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der jeweiligen Bahnellipse befindet.

Abbildung 1.1. Die Erde im Planetensystem unserer Sonne

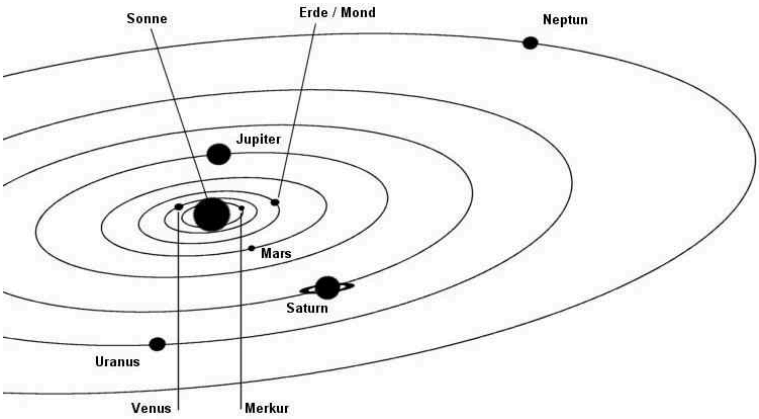


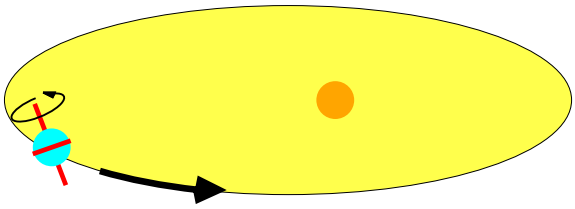
Bild von Thomas Görs, aus Wikipdedia

Wir Erdbewohner umkreisen auf unserem Planeten in einem Jahr das strahlende Zentralgestirn auf der dritten Bahn von innen. Eigentlich ist das Wort "umkreisen" ja nicht ganz korrekt, denn wie gesagt, ist die Erdbahn ja eine Ellipse. In unserem Fall jedoch sind wir nicht weit daneben, denn die Bahn der Erde weicht nur wenig von der Kreisgestalt ab. Ihre grosse Halbachse misst rund 150 Mio. km, und die kleine ist knapp ein Promille kleiner. Der Abstand der beiden Brennpunkte vom Zentrum der Ellipse beträgt bloss etwa 1/60 der Länge der grossen Halbachse. Um den 3. Januar herum sind wir der Sonne am nächsten und um den 5. Juli herum am weitesten entfernt. Der erdnächste Punkt heisst *Perihel*, der erdfernste *Aphel*. Die Sonnennähe im Januar spüren wir bekanntlich nicht durch besondere Wärme, und doch hat dieser Effekt eine merkliche Auswirkung. Auf Grund des zweiten Keplerschen Gesetzes fliegt nämlich die Erde umso schnelle, je näher sie sich bei der Sonne befindet, im Winter also etwas schneller als im Sommer. Das hat zur Folge, dass das Winterhalbjahr etwas kürzer ist als das Sommerhalbjahr, und zwar immerhin um etwa eine Woche. Die Ebene, in der die Erde die Sonne umrundet, heisst die *Ekliptikebene* (manchmal auch kurz *Ekliptik* genannt).

Gleichzeitig mit dieser jährlichen Umrundung der Sonne dreht sich die Erde in einem Tag einmal um die eigene Achse, welche den Nordpol mit den Südpol verbindet. Die Rotationsachse steht dabei schief zur Ekliptikebene und bildet mit ihr einen Winkel von rund 66.5°.

Die Ebene des Erdäquators, welche senkrecht auf der Erdachse steht, schneidet somit die Ekliptikebene unter einem Winkel von ca. 90° - 66.5° = 23.5°. Dieser Winkel heisst die *Ekliptikschiefe*.

Abbildung 1.2. Die Bewegung der Erde im Sonnensystem

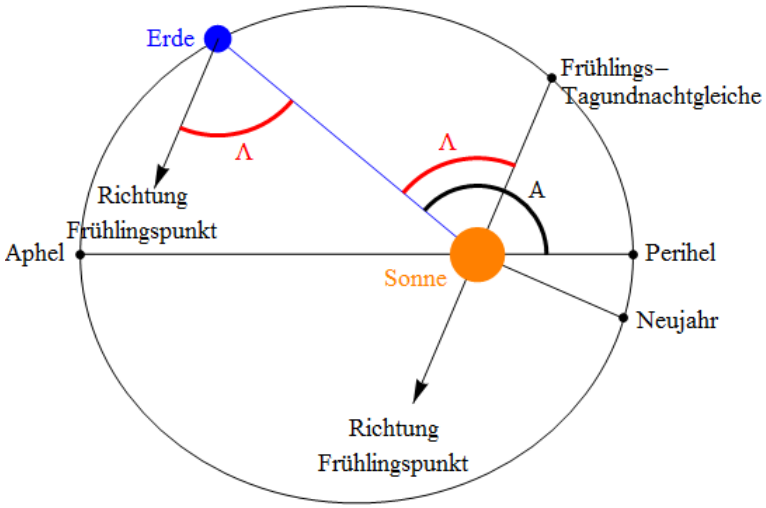


Die gelbe Scheibe stellt die Ekliptikebene dar. Die Erde ist blau, der Äquator und die Erdachse sind rot dargestellt. Die Sonne steht in einem der Brennpunkte der ellipsenförmigen Umlaufbahn der Erde.

Wir selber sitzen nun irgendwo auf diesem Kreisel, der seinerseits um die Sonne kreist. Wenn wir uns gerade auf der der Sonne zugewandten Seite unseres Kreisels befinden, dann scheint bei uns - klares Wetter vorausgesetzt - die Sonne. Auf der der Sonne abgewendeten Seite aber herrscht Nacht.

Die Erde bewegt sich, wie gesagt, auf einer ebenen ellipsenförmigen Bahn um die Sonne. Ihre Position an einem beliebigen Tag des Jahres kann man mit einem von der Sonne aus gesehenen Winkel zwischen der Position der Erde und einem im Prinzip willkürlich gewählten Referenzpunkt auf der Ellipse beschreiben. Mehrere solche Referenzpunkte drängen sich auf: Die Position der Erde zum Jahresbeginn, das Perihel oder das Aphel oder die Position zum Zeitpunkt einer Sonnenwende oder einer Tagundnachtgleiche.

Abbildung 1.3. Die Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn



Bei den sogenannten *ekliptikalen* Koordinaten dient die Position der Erde zum Zeitpunkt der Frühlings-Tagundnachtgleiche als Referenz. Der Winkel zwischen dieser und der aktuellen

Position der Erde, von der Sonne aus betrachtet, heisst die *ekliptikale Länge*. Wir bezeichnen sie hier mit Λ. In vielen Büchern wird auch kleine griechische Lambda λ verwendet. Um Verwechslungen mit der geographischen Länge zu vermeiden, ziehen wir die Grossschreibweise vor.

Die genaue Berechnung der ekliptikale Länge der Erdpostition zu einem bestimmten Zeitpunkt ist nicht ganz trivial. Man bestimmt zuerst die sogenannte (wahren) *Anomalie A*, das ist der Winkel zwischen dem Perihel und der Erdposition, von der Sonne aus gemessen. Die von Kepler formulierten Planetengesetze liefern eine Gleichung, die sogenannte Kepler-Gleichung, aus welcher die Anomalie mit einem relativ aufwändigen numerischen Verfahren iterativ bestimmt werden kann.

Zum Zweck der Berechnung von Sonnenuhren kann man sich aber auch mit einer einfachen Näherungsformel behelfen:

$$\Lambda = -77.6° + n \cdot 0.9856° + 1.9° \sin(n \cdot 0.9856° - 2.7°) \tag{1.1}$$

Dabei ist n die seit Jahresanfang verflossene Zeit in Tagen.

1.2. Unser Blick auf die Sonne

Im letzten Abschnitt haben wir einen Blick von aussen auf das Sonnensystem und speziell auf die Bewegung der Erde relativ zur Sonne geworfen. Nun überlegen wir uns, wie man denn die Sonne von unserem durch das All wirbelnden Planeten aus sieht, denn die Bestimmung der Position der Sonne am Firmament zu jedem Zeitpunkt ist das für die Konstruktion einer Sonnenuhr zentrale Problem.

Die Position der Sonne ist, wie wir aus Erfahrung wissen, von drei Einflüssen abhängig:

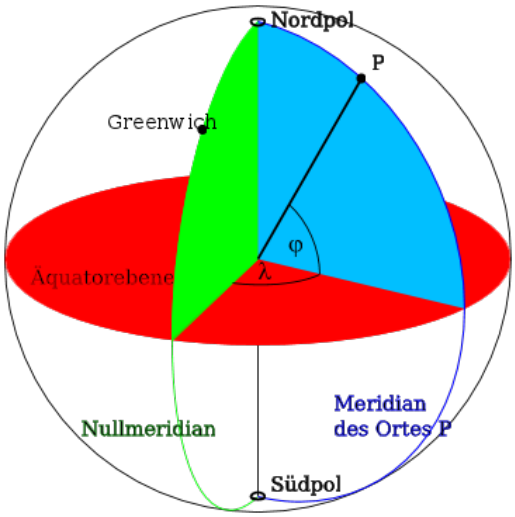
1. Von unserem *Standort* auf der Erde (am Äquator steht die Sonne bekanntlich höher am Himmel als bei uns),
2. Von der *Tageszeit*, also vom Rotationswinkel der Erde um ihre eigene Achse,
3. Von der *Jahreszeit*, also von der Position der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne.

1.2.1. Unser Standort auf der Erde

Um einen Punkt P auf der Erdoberfläche zu beschreiben, stellen wir uns die Erde etwas vereinfachend als ideale Kugel vor. Nun benötigen wir zwei Angaben:

1. Ein Mass für die "Nördlichkeit", und
2. ein Mass für die "Östlichkeit".

Abbildung 1.4. Die Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn



Geographische Koordinaten

Als Mass für die Nördlichkeit könnte man z.B. die Distanz zum Nordpol verwenden; je kleiner sie ist, um so nördlicher befindet sich der Ort *P*. Schon Ptolomäus hat aber erkannt, dass es praktischer ist, statt mit Distanzen mit Winkeln zu arbeiten. Zu diesem Zweck verbindet man in Gedanken den Ort *P* auf der Erdoberfläche mit dem Erdzentrum. Nun ist der Winkel φ zwischen dieser Verbindungsstrecke und der Äquatorebene, wie im Bild gezeigt wird, ein Mass für die nor-südliche Lage. Dieser Winkel heisst die *geographische Breite*. Für einen Ort auf dem Äquator ist die geographische Breite $0°$, für den Nordpol $90°$ und für den Südpol $-90°$.

Während wir für die Beschreibung der nord-südlichen Lage die Äquatorebene als Bezugsebene benützen konnten, gibt es für die ost-westliche Lage keine entsprechende natürliche Bezugsebene. Man muss daher eine künstliche definieren. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen:

Jene Ebene, welche einen Punkt *P* auf Erdoberfläche und die Erdrotationsachse enthält, heisst die *Meridianebene* von *P*. Diese schneidet die Erdkugel in einem Kreis. Jene Hälfte des Schnittkreises, welche durch die beiden Pole begrenzt ist und auf welcher *P* liegt, heisst der *Meridian* von *P* (im Bild blau).

Nun wird eine bestimmte Meridianebene als Bezugsebene ausgewählt. Während Ptolomäus dazu die Meridianebene eines Ortes auf den Kanarischen Inseln benützte, verwendete später fast jede zur See fahrende Nation ihren eigenen sog. *Nullmeridian*. Erst 1884 wurde dann auf der International Meridian Conference in Washington D.C. die Meridianebene der Sternwarte von Greenwich verbindlich als Bezugsebene festgelegt (im Bild grün). Der Winkel λ zwischen der Ebene des Nullmeridians und der Meridianebene von *P* heisst die *Geographische Länge* von *P*.

Die geographische Länge von Luzern beträgt zum Beispiel 8°18' Ost und die geographische Breite 47°3' Nord.

1.2.2. Die scheinbare tägliche Bahn der Sonne

Zuerst stellen wir fest, dass Rotation der Erde um die eigene Achse, also eine volle Umdrehung in einem Tag, sehr viel schneller erfolgt als eine volle Umrundung der Sonne, welche

365.25 Tage in Aspruch nimmt. Während einer ganzen Umderehung um die eigene Achse kommt die Erde auf ihrer Reise um die Sonne nur knapp 1° (360°/365) weiter. Wenn wir also untersuchen wollen, welche scheinbare Bewegung die Sonne im Verlauf eines Tages, von der Erde aus betrachtet, ausführt, können wir den Einfluss der sogenannten *Revolution* (Umdrehung um die Sonne) gegenüber der *Rotation* (= Umdrehung um die eigene Achse) in erster Näherung vernachlässigen, das heisst, uns vorstellen, die Erdachse sei für die Dauer eines Tages im All fixiert, während die Erde sich munter um diese fixe Achse dreht.

Nun ist es wie bei einem Karussell: Wenn es sich links herum dreht, so haben die Kinder auf dem Karussell das Gefühl, die Umgebung und die Zuschauer drehten sich rechts herum. Für uns auf dem Erdkarussel heisst das, dass sich die Sterne scheinbar in Gegenrichtung zur Erdrotation um die Erdachse drehen. Das kann man sehr gut zeigen, indem man in einer klaren Neumondnacht eine Fotokamera in Richtung Norden mit einer Neigung gegen den Horizont von etwa 45° aufstellt und den Verschluss für zwei, drei Stunden offen lässt. Dann hinterlassen die Sterne Spuren in der Form von Kreisbögen, in deren Zentrum der hellste Stern im Sternbild des kleinen Bären, der sogenannt Polarstern, liegt.

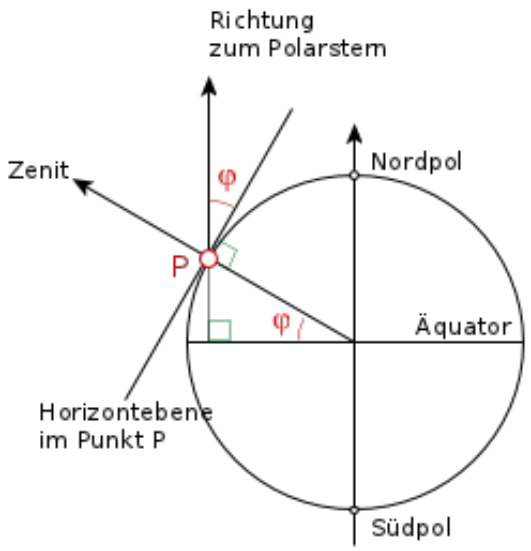
Abbildung 1.5. Sternspuren

Bild Eduard von Bergen

Das kommt davon, dass die Rotationsachse der Erde im All so positioniert ist, dass ihre Verlängerung über den Nordpol hinaus auf eine Stelle am Himmel weist, die sehr nahe beim Polarstern liegt. Diese Stelle heisst der *Himmelsnordpol*. Der Polarstern ist also auf der nördlichen Hemisphäre der einzige Fixstern, der während der ganzen Nacht keine nennenswerte scheinbare Kreisbewegung macht.

Die Richtung der sog. *Polachse*, in der wir nächtens den Polarstern finden, hängt von unserem Beobachtungsort auf der Erde ab. Das folgende Diagramm verdeutlicht dies.

Abbildung 1.6. Die örtliche Blickrichtung zum Himmelsnordpol

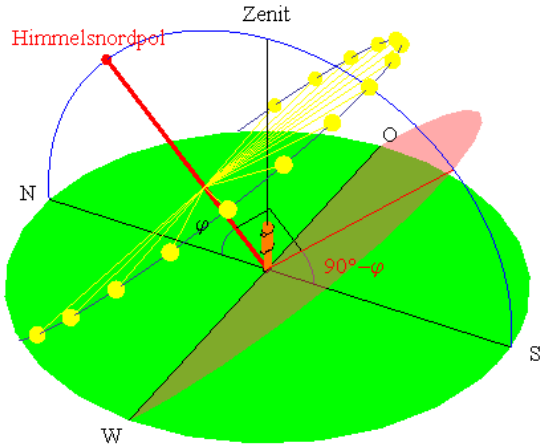


Der Winkel zwischen dem Polarstern und dem nördlichen Horizont ist gleich der geographischen Breite unseres Standortes P

Wenn man sich an einem beliebigen Punkt auf der nördlichen Hemisphäre der Erde befindet, so ist die Blickrichtung zum Polarstern wegen der enormen Entfernung von 430 Lichtjahren immer praktisch parallel zur Erdachse. Für einen Beobachter im Punkt P ist daher der Winkel zwischen der Richtung zum Polarstern und der Horizontebene immer gleich seiner geographischen Breite φ (Diese Tatsache wird von alters her von den Seefahrern zur Bestimmung der geographischen Breite ausgenützt). Das heisst, dass wir auf der nördlichen Hemisphäre den Polarstern immer im Norden und in Luzern unter einem Winkel von ziemlich genau 47° über dem nördlichen Horizont sehen.

Weil wir angenommen haben, dass die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne praktisch still steht, verhält sich die Sonne bei diesem Szenario von der Erde aus gesehen gleich wie ein Fixstern. Auch sie bewegt sich scheinbar auf einem Kreis um den Polarstern, nur können wir das am Tag ohne spezielle Instrumente nicht direkt fotographieren.

Abbildung 1.7. Tagesbahn der Sonne



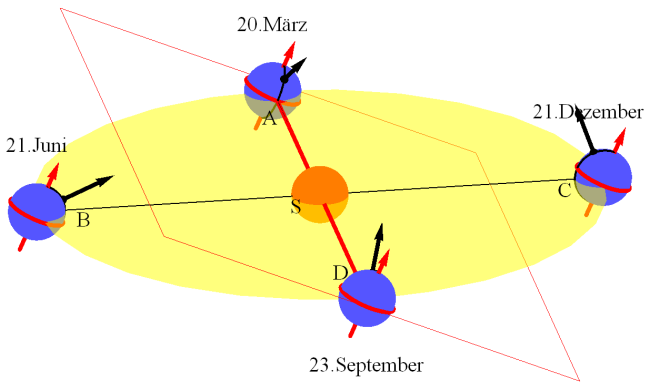
Die rot eingetragene sogenannte Polachse von unserem Standort in Richtung zum Himmelsordpol ist die scheinbare Drehachse der Sonnenbahn (und der Fixsterne in der Nacht). Die rot schraffierte Ebene durch unseren Standort, welche senkrecht auf der Polachse steht, heisst Himmelsäquator.

Die Ebene der scheinbaren Kreisbahn der Sonne steht wie jene der Fixsternen immer senkrecht auf der Erdachse und somit parallel zur Äquatorebene, welche ja ebenfalls senkrecht zur Erdachse steht. Nun stellen wir uns an unseren Standort eine Ebene vor, welche parallel zur Erdäquatorebene liegt (im Bild rot schraffiert). Diese heisst die lokale *Himmels-äquatorebene* oder kurz Äquatorebene, wenn eine Verwechslung mit der Erdäquatorebene ausgeschlossen werden kann. Die Himmelsäquatorebene schneidet die Horizontebene in der Ost-West-Geraden an unserem Standort. Weil die Himmeläquatorebene senkrecht auf der Polachse steht, und letztere mit der Horizontebene einen Winkel von φ (= geographische Breite) bildet, beträgt der Winkel zwischen der Himmelsäquatorebene und der Horizontebene $90° - \varphi$, in Luzern also $90° - 47° = 43°$. Wenn wir also unseren Blick in Luzern nach Süden unter einem Winkel von $43°$ zur Horizontebene erheben, blicken wir exakt in die lokale Äquatorebene.

1.2.3. Die Lage der Tagesbahn im Jahresverlauf

Anders als bei den Fixsternen verschiebt sich aber an unserem Beobachtungsort die scheinbare Sonnenbahnebene im Verlauf des Jahres entlang der Polachse. Um das zu verstehen, müssen wir nun die Bewegung der Erde um die Sonne ebenfalls berücksichtigen. Dabei ist wesentlich, dass Rotationsachse der Erde gegenüber der Ebene ihrer Bahn um die Sonne schräg steht. Das folgende Bild verdeutlicht diesen Sachverhalt.

Abbildung 1.8. Bahn der Erde um die Sonne



Positionen der Erde auf der Ekliptik an den beiden Tagundnachtgleichen (20. März und 23. September) sowie an den Sonnwendtagen (21. Juni und 21. Dezember).

Im Bild ist die Stellung der Erde (blau) gegenüber der Sonne (orange) an 4 speziellen Tagen im Jahreslauf schematisch eingetragen. Die Rotationsachse der Erdkugel ist mit einem roten Pfeil, der Äquator mit einem roten Kreis auf dem Umfang eingezeichnet. Unser Standort ist mit einem schwarzer Pfeil, der zum Zenit weist, markiert. Jede der 4 jahreszeitlichen Positionen der Erde auf ihrem Umlauf um die Sonne ist jeweils zum Zeitpunkt des wahren Mittags gezeichnet, also dann, wenn von uns aus gesehen die Sonne genau im Süden in der Meridianebene steht. (Die lokale Meridianebene enthält ja die Erdachse (rot) und die lokale Richtung zum Zenit (schwarz).)

Wie im Bild gezeigt, steht die Rotationsachse und somit auch die Äquatorebene der Erde schief zur Ekliptikebene (gelb). Neben der Ekliptikebene ist im obigen Bild eine weitere, für die folgenden Betrachtungen wichtige Ebene mit einer roten Umrandung angedeutet, nämlich die Ebene, welche die Sonnen enthält und parallel zur Erdäquatorebene ist. Man nennt sie die *Himmelsäquatorebene*. Die Ekliptikebene und die Himmelsäquatorebene schneiden sich unter einem Winkel von ca. 23.5°, der sogenannten *Ekliptikschiefe*.

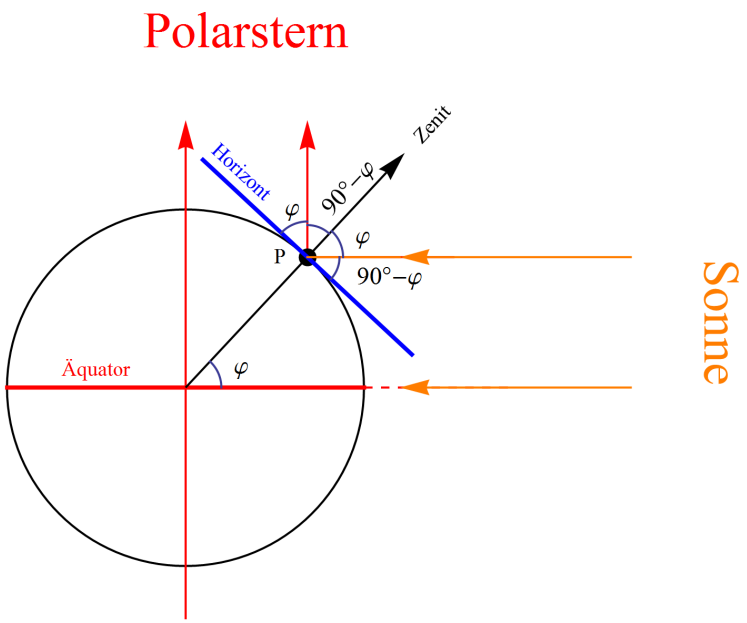
Um den 20. März und um den 23. September herum ist die Erde genau auf der Schnittgeraden der Ekliptikebene und der Himmelsäquatorebene, um den 21. Juni und 21. Dezember herum auf einer Geraden, welche senkrecht zur dieser Schnittgeraden steht. Der genaue Zeitpunkt dieser Ereignisse fällt wegen des Schaltjahreszyklus nich jedes Jahr auf dasselbe Datum.

Wie das Bild zeigt, ist der Winkel zwischen unserer Blickrichtung zur Mittagssonne und der durch den schwarzen Pfeil markierten Richtung zum örtlichen Zenit am 21. Juni am kleinsten, die Sonne steht also von uns aus gesehen am Mittag dieses Tages am höchsten am Himmel. Das ist der Tag der *Sommersonnenwende*. Am Tag der *Wintersonnenwende*, um den 21. Dezember herum, hingegen ist der Winkel zwischen Sonnenrichtung und Zenit am grössten, die Sonnen steht also am tiefsten am Himmel. Am 20. März und am 23. September schliesslich ist jeder Punkt auf der Erde gleich lange an der Sonne wie am Schatten; dies sind die *Tagundnachtgleichen*. Die Sonnenwenden werden mit einem lateinischen Fremdwort auch *Solstitien* (Sonnenstillstandstage), die Tagundnachtgleichen *Äquinoktien* genannt.

Nun überlegen wir etwas detailierter, wie sich der Jahreslauf der Erde um die Sonne auf den täglichen Sonnenstand auswirkt. Den höchsten Stand im Tagesverlauf erreicht die Sonne am örtlichen Mittag genau im Süden. Man sagt dann, die Sonne *kulminiere*. Den Winkel zwischen dem Kulminationspunkt und dem Horizont nennt man die *Kulminationshöhe*.

Wir überlegen uns zuerst, auf welche Höhe die Sonne am 20. März kulminiert. An diesem Tag befindet sich die Erde, wie die Abbildung 1.8 zeigt, genau auf der Schnittlinie der Ekliptikebene (gelb) und der Himmelsäquatorebene (rot umrandet). Nun stellen wir uns einen ebenen Schnitt von A nach S vor, welche diese Schnittlinie und die Erdachse enthält. Das sieht dann so aus:

Abbildung 1.9. Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen am wahren Mittag an den Tagundnachtgleichen

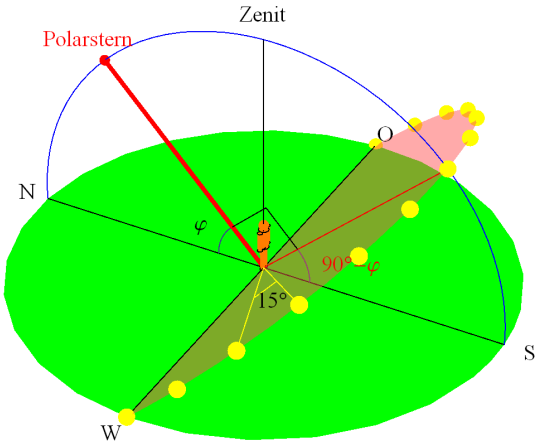


An unserem Standort P bilden die einfallenden Sonnenstrahlen mit der Richtung zum Zenit (Senkrechte) einen Winkel φ, der gerade gleich unserer geographischen Breite ist. Mit der Horizontebene bilden die Sonnenstrahlen daher einen Winkel von 90°-φ, die Sonne steht also, von uns aus gesehen, genau in der lokalen Äquatorebene.

Nun dreht sich ja unser Standort P zusammen mit der Erde um die Erdachse, und diese steht senkrecht zur Himmeläquatorebene. Die Sonne wandert daher von uns aus gesehen im Verlauf des Tages scheinbar auf der lokalen Himmeläquatorebene.

In der folgenden Graphik wird dieser Sachverhalt illustriert.

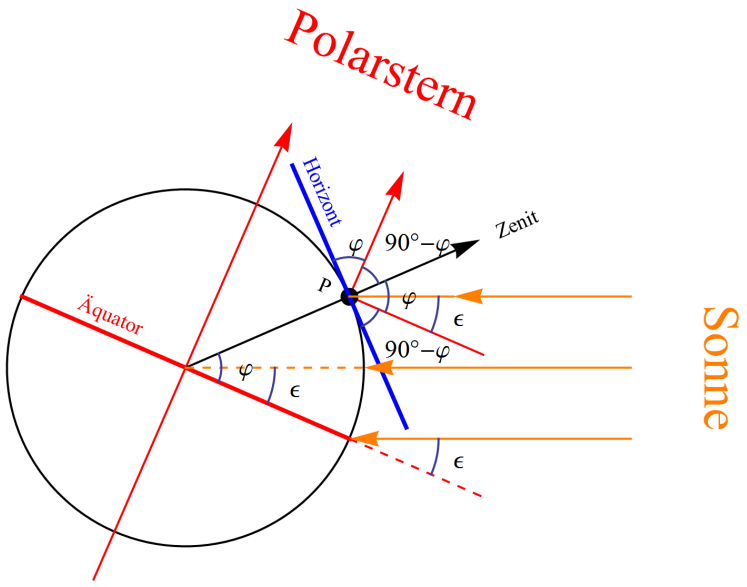
Abbildung 1.10. Sonnenstände am beiden Tagundnachtgleichen



Im Bild sind die Sonnenstände am 20. März im Abstand von einer Stunde eingetragen. Pro Tag macht die Erde eine ganze Umdrehung um die eigene Achse, was pro Stunde einen Winkel von 360°/24 = 15° ausmacht. Von uns auf dem Erdkarussel aus gesehen dreht sich somit die Sonne scheinbar mit einer Geschwindigkeit von 15° pro Stunde auf der Himmelsäquatorebene (rotschraffiert) in entgegengesetzter Richtung zur Erdrotation. Am 23. September habe wir die gleiche Situation. Die Erde befindet sich in Abbildung 1.8 einfach auf der entgegengesetzten Seit der Sonne im Punkt D.

Nun betrachten wir die Szene zur Zeit der Sommersonnenwende am 21. Juni. Hier hilft ein Schnitt durch die Abbildung 1.8 entlang einer Ebene, welche die Gerade BS und die Erdachse enthält.

Abbildung 1.11. Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen am wahren Mittag des Sommersonnenwendtages

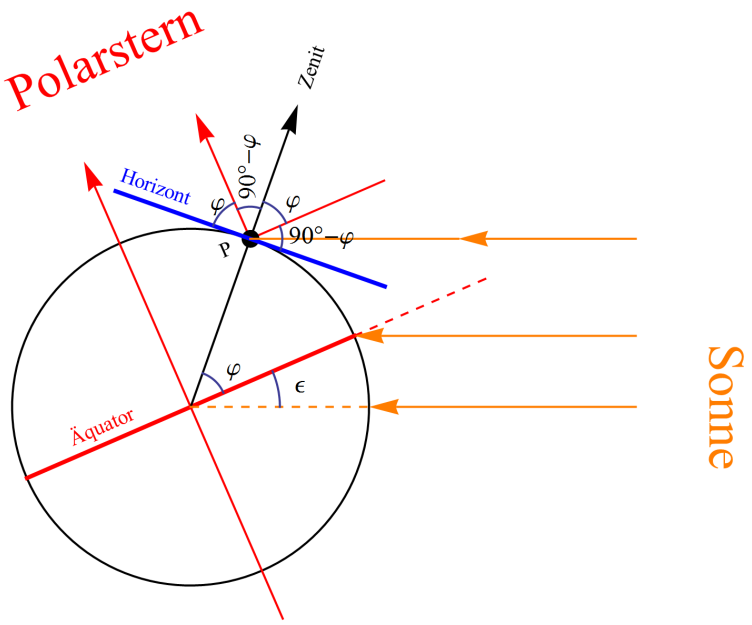


Wie gesagt, ist die Erdachse gegenüber dem Himnmelsäquatorebene geneigt, und zwar um einen Winkel $\varepsilon = 23.5°$. Dadurch erhöht sich der Winkel der einfallenden Sonnenstrahlen

gegenüber der Horizontebene um gerade diesen Winkel. Die Kulminationshöhe beträgt also am 23 Juli $90° - \varphi + \varepsilon$, was für Luzern einen Wert von $90° - 47° + 23.5° = 66.5°$ ergibt.

Anlässlich der Wintersonnenwende am 21. Dezember haben wir gerade die umgekehrt Situation.

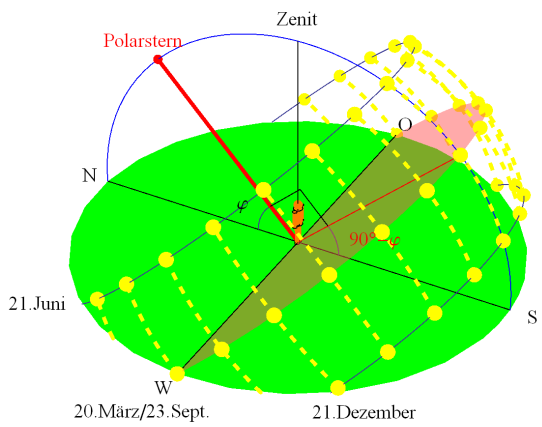
Abbildung 1.12. Einfallsrichtung der Sonnenstrahlen am wahren Mittag des Wintersonnenwendtages



Jetzt ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahelen gegenüber dem Himmelsäqutor um die Ekliptischiefe verkleinert. Am wahren Mittag steht also die Sonne nun unter einem Winkel von $90° - \varphi - \varepsilon$ über dem Horizont, was für Luzern den Wert von $90° - 47° - 23.5° = 19.5°$ ergibt.

Da der tägliche Lauf der Sonne über das Fimament stets auf einem Kreis erfolgt, dessen Zentrum auf der verlängerten Rotationsachse der Erde liegt, ergibt sich für die vier speziellen Tage folgendes Bild:

Abbildung 1.13. Stündliche Sonnenstände im Verlauf des Jahres



Für Tage zwischen den vier speziellen Tagen liegt die Kulminationshöhe zwischen den oben berechneten Werten. Allgemein kann man die Kulminationshöhe an einem bestimmten Tag durch die Formel

$$90° - \varphi + \delta \tag{1.2}$$

berechen. Dabei ist δ eine Winkel, der zwischen ε und $-\varepsilon$ liegt. Man nennt ihn die *Deklination* der Sonne. Wenn man die Sonnenstände für eine bestimmte Tageszeit (nach wahrer Ortszeit) während eines Jahres beobachtet, so liegen diese auf Kreisbogen, welche senkrecht auf der Himmelsäquatorebene stehen, und die in der obigen Figur gelb gestrichelt eingetragen sind.

Die exakte Berechnung der Deklination δ für einen beliebigen Tag ist nicht ganz einfach. Ein paar, für Sonnenuhranwendungen wichtige Werte, nämlich jene für den Zeitpunkten des Eintritts in eine neues Tierkreizeichen kann man der folgenden Tabelle entnehmen. Im nächsten Abschnitt werden wir auch eine Näherungsformel kennen lernen, welche für Sonnenuhranwendungen genügt.

Tabelle 1.1. Kulmination der Sonne

Datum	**Deklination**	**Kulminationshöhe in Luzern**
22. Dez	-23.5°	19.5°
21. Jan. / 23. Nov.	-20°	23°
19.Feb. / 23. Okt.	-11.5°	31.5°
20. März / 23. Sept.	0°	43°
21. April / 23. Aug.	11.5°	54.5°
22. Mai / 23. Juli	20°	63°
21. Juni	23.5°	66.5°

1.2.4. Äquatorkoordinaten und Horizontkoordinaten

1.2.4.1. Das erdfeste Äquatorkoordinatensystem

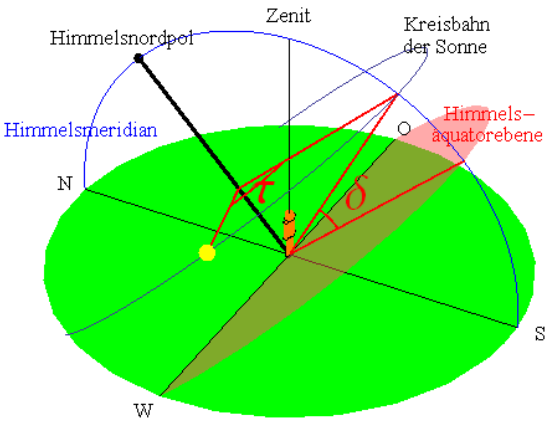
Das in den letzten beiden Abschnitten Gesagte erlaubt nun, den Sonnenstand am Himmel mit zwei Winkeln zu beschreiben.

1. Die *Deklination* δ, welche von der Jahreszeit abhängig ist, beschreibt die Lage der Kreisbahn, auf der sich die Sonne an diesem Tag bewegt. Die Deklination wird vom Himmeläquator aus entlang dem Himmelsmeridian gemessen, und zwar in Richtung zum Himmelsnordpol positiv und in Richtung zum Südpol negativ. Der Himmelsnordpol hat also die Deklination $90°$, der Südpol $-90°$

2. Der *Stundenwinkel* τ, welcher von der Tageszeit abhängig ist, beschreibt, wo auf der Kreisbahn des entsprechenden Tages sich die Sonne zu einer bestimmten Tageszeit befindet. Der Stundenwinkel wird auf der scheinbaren Tagesbahn vom höchsten Punkt, dem sog. *Kulminationspunkt*, aus gemessen, und zwar am Nachmittag positiv und am Vormittag negativ. Der Kulminationspunkt ist der Schnittpunkt der Sonnenbahn mit dem Himmelsmeridian. Dort steht die Sonne am wahren Mittag.

Das folgende Bild illustriert das.

Abbildung 1.14. Stundenwinkel und Deklination der Sonne



Wie erwähnt, hängt die Deklination vom Datum und der Stundenwinkel von der Tageszeit ab. Die Deklination für ein bestimmtes Datum kann man jedem astronomischen Jahrbuch entnehmen oder, wenn man mit einer beschränkten, aber für Sonnenuhren akzeptablen Genauigkeit von etwa 1/5 Grad zufrieden ist, mit Hilfe der folgenden Formel angenähert berechnen:

$$\delta \approx 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot n - 79.64°) + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot n - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot n - 59.93°) \tag{1.3}$$

Dabei ist n die seit Jahresbeginn verflossene Zeit in Tagen.

Den Stundenwinkel kann man aus der seit dem lokalen, wahren Mittag verflossenen Zeit leicht berechnen, wenn man bedenkt, dass die Sonne auf ihrer Bahn pro Stunde um 15° zurücklegt.

$$\tau = (t - 12) \cdot 15° \tag{1.4}$$

wobei t die Tageszeit in Stunden wahrer Ortszeit (24-Stunden-Zählung) ist.

Das Bezugssystem, das durch den Himmelsäquator und die Polachse gebildet wird, heisst das (erdfeste) *Äquatorsystem*. Deklination und Stundenwinkel heissen entsprechend die *Äquatorkoordinaten*.

Als Beispiel wollen wir die Deklination und den Stundenwinkel der Sonne am 7. März eines Gemeinjahres (d.h. kein Schaltjahr) um 14.00 Uhr mitteleuropäischer Zeit berechnen.

Zu diesem Zeitpunkt sind seit Jahresbeginn etwa 65.6 Tage verflossen. Gemäss der obigen Näherungsformel beträgt die Deklination annähernd

$$\delta \approx 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot 65.6 - 79.64°) + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot 65.6 - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot 65.6 - 59.93°) \tag{1.5}$$

$$\delta \approx -5.3° \tag{1.6}$$

Der Tageszeitung entnimmt man, dass an unserem Standort der Sonnenhöchstand (also der wahre Mittag) an diesem Tag um 12.38 Uhr erreicht wird. In einigen Zeitungen wird nur die Zeitpunkte des Sonnenauf- und Unterganges angegeben. Der wahre Mittag findet genau in der Mitte dieser zei Zeitpunkte statt. Wenn keine dieser Angaben zu finden ist, so können Sie diese auch mit einem Verfahren, welches im Abschnitt über die Zeitmasse vorgestellt wird, berechnen. Um 14.00 Uhr sind also seit dem wahren Mittag 1 Stunde und 22 Minuten vergangen, es ist also 22 Minuten nach 13 Uhr wahrer Ortszeit. Nun sind 22 Minute = 0.37 Stunden, die Zeit in Dezimaldarstellung ist als $t = 13.37$ Stunden. Damit erhalten wir

$\tau = (13.37 - 12) \cdot 15° = 1.37 \cdot 15° = 20.5°$

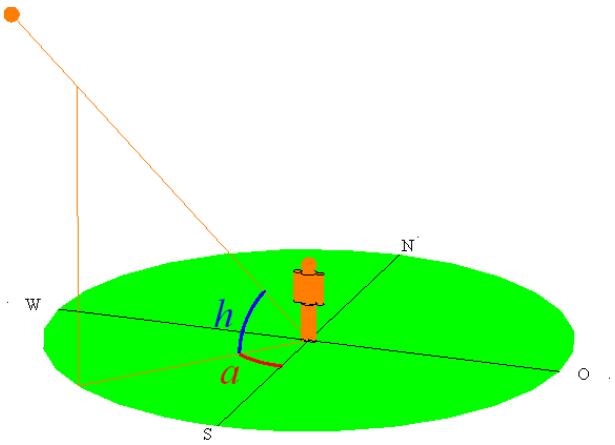
1.2.4.2. Das Horizontkoordinatensystem

Die beiden Winkel δ und τ sind aber für den menschlichen Beobachter schwer zu interpretieren, denn die Himmelsäquatorebene ist eine imaginäre Ebene und am Himmel daher schwer zu lokalisieren. Der Stundenwinkel muss dann auf dieser unsichtbaren, schiefen Ebene abgetragen werden, was ohne spezielle Instrumente nur schwer gelingt. Da kommt man in der Regel nicht um die Verwendung eines astronomischen Teleskops mit geeigneter Montierung herum. Für den Menschen stellt hingegen die horizontale Ebene die natürliche Bezugsebene dar und Drehrichtungen geben wir in den vier Himmelsrichtungen an. Wenn wir die daher die Position der Sonne (oder eines anderen Gestirns) beschreiben wollen, drängen sich zwei Bestimmungsgrössen auf, nämlich die Himmelsrichtung des Objektes sowie seine Höhe über dem Horizont. Beide Stücke lassen sich wieder mit einem Winkel beschreiben.

- Die Himmelsrichtung, in der die Sonne steht, wird mit dem horizontal von der Südrichtung aus gemessenen Winkel a ausgedrückt. Nach Westen wird er positiv gezählt, nach Osten negativ. Dieser Winkel heisst *Azimut*. Wenn die Sonne also genau im Süden steht, ist ihr Azimut $0°$, wenn sie genau im Westen steht $90°$, und wenn sie genau im Osten steht $-90°$.

- Die Höhe der Sonne über dem Horizont wird mit dem Winkel h zwischen der horizontalen Ebene und der Richtung zur Sonne beschrieben. Dieser Winkel heisst *Höhenwinkel* oder kurz *Höhe* oder mit einem lateinischen Fremdwort *Elevation*. Bei Sonnenaufgang ist die Höhe 0°. Danach steigt sie an, erreicht am wahren Mittag im Süden ihren höchsten Wert, nimmt dann wieder ab und ist bei Sonnenuntergang wieder 0°.

Abbildung 1.15. Azimut a und Höhe h eines Objektes am Himmel



Das Bezugssystem, das durch den Horizontebene und die Zenitrichtung gebildet wird, heisst das *Horizontsystem*. Azimut und Höhe heissen entsprechend die *Horizontkoordinaten*.

Grundsätzlich kann man den Ort eines Objektes am Himmel sowohl im Äquatorsystem, also mit Stundenwinkel und Deklination, oder im Horizontsystem, also mit Azimut und Höhe beschreiben. Es ist einfach so, dass der Mensch die Horizontkoordnaten leichter erfassen kann, die Äquatorkoordinaten aber für astronomische Zwecke, also auch für die Berechnung von Sonnenuhren, besser geeignet ist. Man wird also die meisten Berechnungen in Äquatorkoordinaten durchführen, währen die Horizontkoordinaten quasi das Userinterface darstellen.

1.2.4.3. Umrechnung zwischen Äquator- und Horizontkoordinaten

Das bedingt, dass man zwischen den beiden Systemen umrechnet. Die Herleitung der entsprechenden Formeln erfordern Kenntnisse entweder in sphärischer Trigonometrie oder in Vektorgeometrie; beides wollen und können wir hier nicht voraussetzen, weshalb die Zusammenhänge im Folgenden ohne Begründung angegeben werden.

Umrechnung vom Horizont- ins Äquatorsystem

$$\tan(\tau) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)\sin(\varphi) + \tan(h)\cos(\varphi)} \tag{1.7}$$

$$\sin(\delta) = \sin(\varphi)\sin(h) - \cos(\varphi)\cos(h)\cos(a) \tag{1.8}$$

Umrechnung vom Äquator- ins Horizontsystem

$$\tan(a) = \frac{\sin(\tau)}{\cos(\tau)\sin(\varphi) - \tan(\delta)\cos(\varphi)} \tag{1.9}$$

$$\sin(h) = \sin(\varphi)\sin(\delta) + \cos(\varphi)\cos(\delta)\cos(\tau) \tag{1.10}$$

Dabei bezeichnen

τ	den Stundenwinkel
δ	die Deklination
a	das Azimut
h	die Höhe
φ	die Geographische Breite des Standortes

Im letzten Beispiel erhielten wir für den Sonnenstand am 7. März um 14.00 Uhr in Luzern.

$\delta = -5.3°$ und $\tau = 20.5°$

Die geographische Breite von Luzern ist $\varphi = 47°$.

Damit erhalten wir

1. Für das **Azimut** der Sonne gemäss Gleichung 1.9

$$\tan(a) = \frac{\sin(20.5°)}{\cos(20.5°)\sin(47°) - \tan(-5.3°)\cos(47°)} = 0.46800 \tag{1.11}$$

Daraus lässt sich a berechnen, wobei aber zur berücksichtigen ist, dass die Tangensfunktion nicht eindeutig umkerhbar ist. Wir erhalten mathematisch betrachte zwei mögliche Werte, nämlich

$$a = \arctan(0.46800) = 25.1° \tag{1.12}$$

oder

$$a = \arctan(0.46800) + 180° = 205.1° \tag{1.13}$$

Aus astronomischen Überlegungen ist aber klar, dass nur der erste Wert infrage kommt, denn das Azimut $25.1°$ bedeutet etwa Südsüdwest, wohingegen das Azimut $205.1°$ eine

Richtung nahe bei Norden (= 180°) bezeichnen würde; da ist aber die Sonne am frühen Nachmittag sicher nicht zu suchen!

2. Für die **Höhe** der Sonne nach Gleichung 1.10

$$\sin(h) = \sin(47°)\sin(-5.3°) + \cos(47°)\cos(-5.3°)\cos(20.5°) = 0.56852 \tag{1.14}$$

Auch hier liefert die Beziehung im Prinzip zwei Werte, nämlich

$$h = \arcsin(0.56852) = 34.6° \tag{1.15}$$

oder

$$h = 180° - \arcsin(0.56852) = 145.4° \tag{1.16}$$

Und auch hier ist klar, dass der erste Wert korrekt ist, denn 145.4° vom Horizont aus gemessen würde ja ein Punkt bezeichnen, der jenseits des Zenits (90°) liegt!

Man mag vermuten, dass bei der Berechnung des Azimuts und der Höhe immer der erste, von Rechner gelieferte Arcuswert korrekt ist. Das trifft für die Höhe tatsächlich zu, denn der Arcussinuswert liegt immer im Bereich zwischen −90° und 90°, in dem auch die Höhe jedes Himmelsobjektes liegt. Für das Azmimut hingegen ist das manchmal nicht der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

Wir berechnen den Sonnenstand am 1. Juli sieben Stunden vor dem wahren Mittag.

1. Der **Stundenwinkel** ist

$$\tau = -7 \cdot 15° = -105° \tag{1.17}$$

2. Die **Deklination** beträgt gemäss Tabelle 1 etwa

$$\delta = 23° \tag{1.18}$$

3. Für das **Azimut** gilt dann gemäss Gleichung 1.9

$$\tan(a) = \frac{\sin(-105°)}{\cos(-105°)\sin(47°) - \tan(23°)\cos(47°)} = 2.0175 \tag{1.19}$$

Wenn wir jetzt ohne Überlegung

$$a = \arctan(2.0175) = 63.6° \tag{1.20}$$

rechnen, so kann das offensichtlich nicht stimmen, denn am Vormittag kann die Sonne nicht im Südwesten stehen. Das Problem ist hier, dass es immer zwei Winkel gibt, welche denselben Tangenswert haben. Diese beiden liegen stets 180° auseinander. In unserem Falle wäre also

$$a = \arctan(2.0175) - 180° = -116.4° \tag{1.21}$$

der korrekte Wert. Der negative Wert bedeutet, dass der Winkel nicht von Süden nach Westen, sondern von Süden nach Osten zu zählen ist. Die Sonnen steht also im betrachteten Augenblick etwa im Nordostosten, was im Sommer am frühen Morgen durchaus möglich ist.

4. Vollständigkeitshalber wollen wir auch noch die **Höhe** berechnen

$$\sin(h) = \sin(47°)\sin(23°) + \cos(47°)\cos(23°)\cos(-105°) = 0.123 \tag{1.22}$$

Daraus ergibt sich die Höhe

$$h = \arcsin(0.123) = 7.1° \tag{1.23}$$

also nur knapp über dem Horizont, was wegen der frühen Morgenstunde plausibel ist.

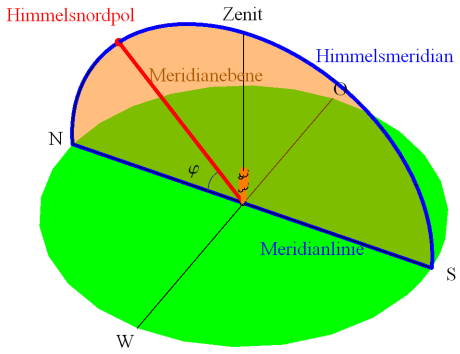
1.3. Die Tageszeiteinteilung

Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts hatte jeder Ort seine eigene Zeit, die von der täglichen Bahn der Sonne über das Himmelsgewölbe bestimmt wurde. 12 Uhr mittags war, wenn sich die Sonne in der lokalen Meridianebene, also genau im Süden in ihrem täglichen Höchststand befand. Auch wenn es längst schon recht genau laufende Räderuhren gab, so war doch die Sonnenzeit der Taktgeber, wurden doch die mechanischen Uhren weiterhin nach einer Sonnenuhr gerichtet. Bis ins 19. Jahrhundert hinein zeigten einfache Sonnenuhren daher die auf dem Lauf der Sonne basierende *wahre Ortszeit* (WOZ) an. Nachdem aber die Räderuhren etwa im 18. Jahrhundert eine hohe Präzision erreicht hatten, musste dem Umstand Rechnunng getragen werden, dass die natürlichen Tage, also die Zeit von einem Sonnenhöchststand zum nächsten, nicht rund ums Jahr gleich lang sind. So wurden die Sonnenuhren korrigiert, sei es, indem man Tabellen für die Abweichung der neuen *mittlere Ortszeit* (MOZ) zur alten wahren Ortszeit beifügte, oder die Sonnenuhr direkt durch aufgemalte, sogenannte Zeitgleichungsschleifen erweiterte. Erst Ende des 19. Jahrhunderts wurden aus praktischen Günden die heute gebräuchlichen Zeitzonen eingeführt, durch welche in grösseren, begrenzten Gebieten eine einheitliche Zeit definiert werden konnte. Klar, dass auch die Sonnenuhrbauer die Neuerung übernahmen und, nach der Einführung der Sommerzeit im 20. Jahrhundert in Europa, moderne Sonnnenuhren auch für die Anzeige dieser, um 1 Stunde verschobenen Zeit ausgelegt wurden.

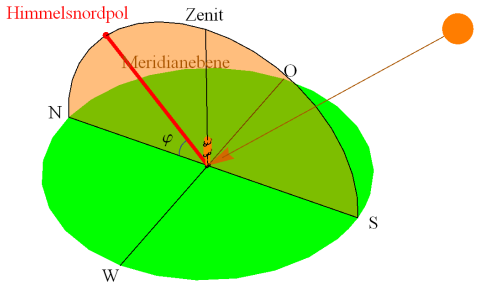
1.3.1. Die wahre Ortszeit

Im letzten Abschnitt haben wir den Zeitpunkt, wenn die Sonne genau im Süden ihren Höchstand erreicht, als Referenzzeit für die Berechnung des Stundenwinkels verwendet. Diesen Zeitpunkt nennt man den *wahren Mittag*. Am wahren Mittag liegt das Sonnenzentrum von uns aus gesehen in der Ebene, welche den Südpunkt auf dem Horizont, den Zenit (Richtung lotrecht über uns) über uns, den Himmelsnordpol sowie den Nordpunkt auf dem Horizont enthält. Diese Ebene heisst die lokale *Meridianebene*. Der Schnittkreis, den die Meridianebene mit dem Himmelsgewölbe bildet, heisst der lokale *Himmelsmeridian*, die Schnittgerade der Meridianebene mit der Horizontebene heisst *Mittagslinie* oder örtliche *Meridianlinie*.

Abbildung 1.16. Der lokale oder wahre Mittag



Die Meridianebene ist die vertikale Ebene, welche durch unseren Standort von Norden nach Süden verläuft.



Der lokale oder wahre Mittag ist jener Zeitpunkt, zu dem das Zentrum der Sonne scheinbar in der Meridianebene steht.

Der wahre Mittag ist offensichtlich vom Beobachtungsstandort auf der Erde abhängig, denn wenn bei uns die Sonne am höchsten am Himmel steht, dämmert in New York gerade erst der Morgen. Das gilt durchaus auch im Kleinen; der wahre Mittag hängt von der geographischen Länge ab und fällt somit nur in den seltesten Fällen auf 12 Uhr mittags nach unserer bürgerlichen, mitteleuropäischen Zeit.

Wenn man die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden wahren Mittagen in 24 Teile unterteilt, erhält man eine *Sonnenstunde*. Die Zeitrechnung, welche auf dem wahren Mittag und der Sonnenstunde aufbaut, wird *wahre Ortszeit* (WOZ) genannt. Die wahre Ortszeit ist das Fundament jeder Sonnenuhrberechnung.

1.3.2. Die mittlere Ortszeit

Es mag nun überraschen, dass die Sonnenstunden über das ganze Jahr betrachtet, nicht genau gleich lang sind. Das hat zwei Ursachen

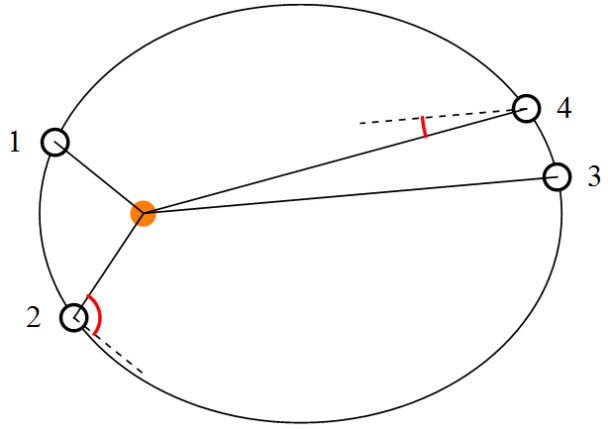
1. Johannes Keplerhat in seinem 1609 erschienenen Werk *Astronomia Nova* darlegte, dass sich alle Planeten (und damit auch die Erde) auf ellipsenförmigen Bahnen um die Sonne bewegen. In einem der beiden Brennpunkte befindet sich die Sonne (1. Keplersches Gesetz). Die Erde erreicht ihren sonnennächsten Punkt (das sog. Perihel) um den 3. Januar herum und ihren sonnenfernsten (das Aphel) um den 5. Juli herum.

   Zusätzlich entdeckte er, dass die Geschwindigkeit eines Planeten um so grösser ist, je näher sich dieser bei der Sonne befindet (2. Keplersches Gesetz).

   Die Ellipse der Erdbahn weicht zwar nur wenig von der Kreisform ab. Trotzdem ist der Effekt deutlich spürbar, ist doch das Sommerhalbjahr rund eine Woche länger als das Winterhalbjahr.

   Das 2. Keplersche Gesetzt wirkt sich aber auch auf die Tageslänge aus. Weil die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne im Laufe eines Tages eine gewisse Strecke zurücklegt, muss sie sich um etwas mehr als 360° um die eigene Achse drehen, bis derselbe Ort wieder der Sonne zugewandt ist. Im folgenden Bild ist der zusätzlich notwendige Drehwinkel rot markiert.

Abbildung 1.17. Länge des Sonnentages



Die Bewegung der Erde von eine Mittag bis zum nächsten in der Nähe des Perihels (Pos. 1 und 2) sowie in der Näher des Aphels (Pos. 3 und 4). (Schematisch, die Grössenverhältnisse sind zum besserem Verständnis stark übertrieben)

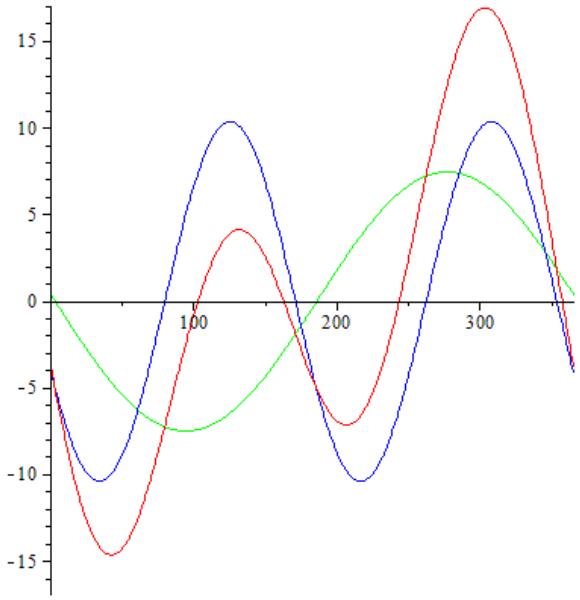
Weil sich die Erde im Winter in Sonnennähe schneller bewegt (von Position 1 nach Position 2), ist die erforderliche Zusatzdrehung grösser, als wenn sie im Sommer langsamer um die Sonne wandert (von Position 3 nach Position 4). Das hat zur Folge, dass die Zeitspanne von einem Sonnenhöchstand zum nächsten, also ein voller Tag, im Winter etwas länger dauert als im Sommer.

2. Der zweite Grund besteht darin, dass die Rotationsachse der Erde schief auf der Ekliptikebene (Ebene der Umlaufbahn um die Sonne) steht. Das hat eine ähnliche Auswirkung auf den Drehwinkel von einem Sonnenhöchstand zum nächsten. Nur an den beiden Tagundnachtgleichen sowie an den beiden Sonnenwenden beträgt er genau 360°.

Unsere modernen, mechanischen oder elektronischen Uhren hingegen haben einen gleichmässigen Gang. Aus diesem Grund hat man den *mittleren Sonnentag* eingeführt, dessen Länge, wie der Name vermuten lässt, das Jahresmittel der Längen der wahren Sonnentage ist. Die Differenz zwischen der Längen des wahren Sonnentage und des mittleren Sonnentage ist zwar nicht sehr gross, aber die Abweichung summieren sich über längere Zeitabschnitte so, dass der Mittag mittlerer Ortszeit im Verlauf eines Jahres vom wahren Mittag um bis zu einer Viertelstunde in beide Richtungen abweicht. Die Zeitzählung, welche auf dieser mittleren Tageslänge basiert, wird *mittlere Ortszeit* (MOZ) genannt. Die Differenz zwischen der wahren Ortszeit und der mittleren Ortszeit bezeichnet man als *Zeitgleichung*. Es handelt sich dabei nicht um eine "Gleichung" in üblichen Sinne, sondern um eine Zahl, welche die Abweichung der wahren Ortszeit von der mittleren Ortszeit in Minuten ausdrückt. Die Bezeichnung hat historische Gründe.

Im folgenden Bild sind die Effekte der beiden Ursachen der Zeitgleichung getrennt und kombiniert dargestellt.

Abbildung 1.18. Graphische Darstellung der Zeitgleichung



Die Werte der Zeitgleichung in Minuten in Abhängigkeit vom Jahrestag.

Grün: Einfluss der Ellipsenform der Erdumlaufbahn; blau:
Einfluss der Schiefe der Erdachse; rot: kombinierter Effekt.

Die exakte Berechnung des Wertes der Zeitgleichung für einen bestimmten Tag ist alles andere als trivial, aber für die Anwendung bei Sonnenuhren auch nicht nötig. Jedes astronomische Jahrbuch oder eines der im Literaturverzeichnis aufgeführten Werke über Sonnenuhren enthält in der Regel eine Tabelle der Zeitgleichungswerte. Für Sonnenuhranwendungen kann man sie aber auch mit der folgenden Näherungsformel berechnen, wenn ein Fehler von maximal einer halbem Minute in Kauf genommen wird. Darin bedeutet n die Zeit in Tagen, die seit Jahresanfang verflossen ist. Das Resultat wird in Minuten dargestellt.

$$ZG \approx 7.38 \cdot \sin(n \cdot 0.9856° + 176.1°) + 9.96 \cdot \sin(n \cdot 1.9713° + 200.5°) \tag{1.24}$$

Weil die Zeitgleichung die Differenz zwischen den wahren (WOZ) und den mittleren Ortszeit (WOZ) ist, gilt

$$\mathrm{MOZ} = \mathrm{WOZ} - \mathrm{ZG} \tag{1.25}$$

1.3.3. Die mitteleuropäische Zonenzeit

Solange sich der Mensch auf seinen oder des Pferdes Beinen durch die Welt bewegte, störte es kaum, dass der wahre Mittag, und damit die ganze Zeitzählung, je nach Ort verschieden war, denn die Zeitabweichung zwischen nahe gelegenen Orten war gering (zwischen Luzern und Bern z.B. ca. 3.5 Minuten, zwischen dem östlichsten und dem westlichsten Punkt der Schweiz aber immerhin rund 18 Minuten). Als dann im 19. Jahrundert Eisenbahnen die Reisegeschwindigkeit drastisch erhöhten und Telegraphen Depeschen ohne nennenswerte Zeitverzögerung übermitteln konnten, waren solche Ortszeitdifferenzen zunehmend hinderlich. Zur Vereinfachung der Zeitumrechnung wurde daher vorerst die Ortszeit der Landeshauptstadt für das ganze Land als verbindlich erklärt, und bei der Erstellung der Fahrpläne für die Eisenbahnen diente oft die Zeit des Heimatbahnhofs der Betriebsgesellschaft als Basis.

Natürlich war auch das kein befriedigender Zustand, denn das bedingte, dass in grösseren Bahnhöfen verschiedene Uhren für die aus verschiedenen Richtungen eintreffenden Fernzüge montiert werden mussten. Nach langwierigen Verhandlungen wurden gegen Ende des 19. Jahrhunderts schrittweise die *Zonenzeiten* eingeführt. Die Schweiz übernahm offiziell die Mitteleuropäische Zeit (MEZ) im Jahre 1893, Frankreich sogar erst 1911.

Zeitzonen

Die Zeitzonen sind im im Prinzip 15 Längengrad breite, von Norden nach Süden verlaufende Streifen, wobei aber auf die Landesgrenzen Rücksicht genommen wird. Jede Zeitzone stützt sich auf die mittlere Ortszeit eines Standardmeridians. Unsere Mitteleuropäische (Winter-)Zeit MEZ beispielsweise ist gleich der mitlleren Ortszeit des 15. Längengrades (Stadt Görlitz). Wenn wir die Zonengrenze überschreiten, müssen wir die Uhr um 1 Stunde vor oder zurück drehen. Nun dreht sich aber die Erde ja nicht ruckweise. Die Ortszeit verändert sich bei einer Reise in ost-westlicher Richtung kontinuierlich, sodass der wahre und der mittlere Mittag in Bezug auf die Zonenzeit von der Lage des Ortes innerhalb der Zeitzone abhängig ist. In Luzern mit 8.3° geographischer Länge liegen wir 6.7° westlich des 15. Breitengrades, dessen Ortszeit unsere Zonenzeit definiert. Daher ist bei uns der Sonnenhöchststand deutlich später. Wie wir gesehen haben, dreht sich die Erde in einer Stunde um 15°, für eine Grad braucht sie daher 4 Minuten und für 6.7° entsprechend 26 Minuten und 48 Sekunden. Daher ist der wahre Mittag in Luzern im Jahresmittel um ca 12.27 Uhr MEZ. Diese Differenz zwischen der Ortszeit und der Zonenzeit wird *Zeitverschiebung* genannt.

Allgemein ergibt sich für einen Ort mit der geographischen Länge λ in der mitteleuropäischen Zeitzone eine Zeitverschiebung (in Minuten) von

$$ZV = (15 - \lambda)4 \tag{1.26}$$

Bei Sonnenuhren, die nach der Einführung der Zonenzeit, also etwa ab dem 20. Jahrundert entstanden sind, wurde natürlich gerne die neue Zeiteinteilung der MEZ angezeigt. Bei einer Sonnenuhr an einer vertikalen Wand, welche die MEZ anzeigt, ist also die Marke für 12 Uhr nicht genau senkrecht unter dem Fusspunkt des Polstabes), sondern leicht links daneben. Ein Beispiel dafür findet man am südlichen Tor zum Klosterhof in Engelberg.

Sonnenuhr aus dem 20. Jahrhundert am südlichen Tor zum Klosterhof in Engelberg

Erstmals in den Kriegsjahren 1941 und 1942, und dann ab 1981 bis auf Weiteres, wurde bei uns eine Sommerzeit eingeführt, mit der (unerfüllten) Hoffnung, Beleuchtungsenergie zu sparen. Bei modernen Sonnenuhren wird daher gerne neben der Skala für die Mitteleuropäische (Winter-)Zeit MEZ auch eine solche für die Mitteleuropäische Sommerzeit (MESZ) angebracht. Die Ziffer 12 für die MESZ steht dann dort, wo die Ziffer 11 der MEZ steht, und der wahre Mittag (Schatten des Polstabes an einer vertikalen Wand also senkrecht unter dem Polfuss) findet in Luzern im Mittel erst um 13.27 Uhr MESZ statt.

1.3.3.1. Zusammenfassung

Für den schnellen Überblick sei das bisher über die Zeitrechnung Gesagte kurz zusammengestellt. Der Zusammenhang zwischen der wahren Ortszeit und unserer Mitteleuropäischen Zonenzeit ist

1. von der Lage innerhalb der Zeitzone und
2. vom Datum

abhängig. Den ersten Effekt nennt man die *Zeitverschiebung*, den zweiten die *Zeitgleichung*.

Im Folgenden bedeutet

WOZ	wahre Ortszeitl
MOZ	die mittlere Ortszeit
MEZ	die Mitteleuropäische Zonenzeit (Winterzeit)
MESZ	die Mitteleuropäische Sommerzeit
ZG	die Zeitgleichung
ZV	die Zeitverschiebung
λ	die Geographische Länge des Standortes (für Luzern 8.3°)
n	die seit Jahresanfang verflossene Zeit in Tagen.

Die wahre Ortszeit WOZ in Stunden ergibt sich aus dem Stand der Sonne, genauer aus deren Stundenwinkel τ

$$\mathrm{WOZ} = 12 + \frac{\tau}{15°} \tag{1.27}$$

Aus ihr berechnet sich die mittlere Ortszeit

$$\mathrm{MOZ} = \mathrm{WOZ} - \mathrm{ZG} \tag{1.28}$$

Der Wert der Zeitgleichung ZG ist vom Datum abhängig und kann aus einer Tabelle entnommen oder mit Hilfe der folgenden Formel in *Stunden*

$$\mathrm{ZG} \approx 0.123 \cdot \sin(n \cdot 0.9856° + 176.1°) + 0.166 \cdot \sin(n \cdot 1.971° + 200.5°) \tag{1.29}$$

oder nach dieser Formel in *Minuten*

$$\mathrm{ZG} \approx 7.38 \cdot \sin(n \cdot 0.9856° + 176.1°) + 9.96 \cdot \sin(n \cdot 1.971° + 200.5°) \tag{1.30}$$

angenähert berechnt werden. Die mitteleuropäische Zonenzeit MEZ erhält man aus der mittleren Ortszeit MOZ und der Zeitverschiebung ZV dann wie folgt

$$\mathrm{MEZ} = \mathrm{MOZ} + \mathrm{ZV} \tag{1.31}$$

Die Zeitverschiebung der Ortszeit gegenüber der Mitteleuropischen Zeit ist abhängig von der geographischen Länge $\lambda =$ des Standortes und beträgt pro Längengrad Differenz zum 15. Längengrad 4 Minuten, also

$ZV = (15° - \lambda)4$ Minuten oder in Stunden

$$ZV = 1 - \frac{\lambda}{15°} \tag{1.32}$$

Die vorangehenden Formeln zusammenfassend kann man die wahre Ortszeit durch die mitteleuropäische Zeit ausdrücken,

$$WOZ = MEZ - ZV + ZG \tag{1.33}$$

oder umgekehrt, die mitteleuropäische Zeit durch die wahre Ortszeit

$$MEZ = WOZ + ZV - ZG \tag{1.34}$$

Für unsere Sommerzeit ist ferner zu berücksichtigen, dass

$$MESZ = MEZ + 1 \tag{1.35}$$

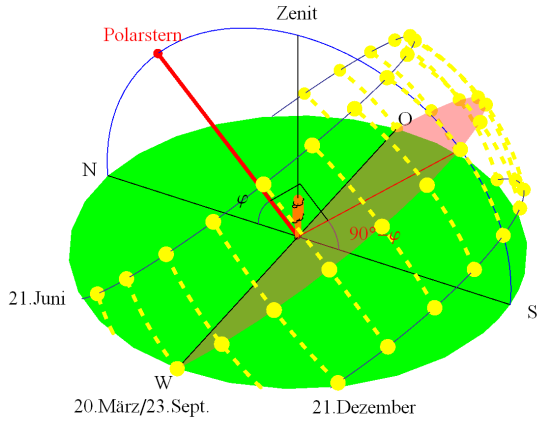
gilt.

Kapitel 2. Sonnenuhren mit Polstab

2.1. Der Schatten des Polstabes

Zur Erinnerung betrachten wir nochmals die Graphik über die Sonnenstände, die wir schon im letzten Kapitel angetroffen haben.

Abbildung 2.1. Sonnenstände im Abstand von einer Stunde im Verlauf des Jahres



Wir haben gezeigt, dass an einem beliebigen Standort auf der Erde die Sonne scheinbar stets um eine Achse kreist, die unseren Standort enthält und parallel zur Erdachse ist. Diese Achse weist auf den Himmelsnordpol, in dessen enger Nähe der Polarstern leuchtet; man nennt sie *Polarachse* oder auch *Polachse*. Die Polachse liegt in der vertikalen Nor-Süd-Ebene (Meridianebene) und bildet mit der Horizontalebene einen Winkel, der gerade gleich der geographischen Breite φ ist. Der Himmelsnordpol hat also das Azimut 180° und seine Höhe beträgt in Luzern 47°.

Die Sonne beschreibt am Himmel täglich scheinbar eine Kreisbahn in einer Ebene, die senkrecht zur Polachse und daher parallel zum Himmelsäquator ist. Das Kreiszentrum liegt dabei auf der Polachse.

Und nun kommt der Clou: Wenn wir einen Stab in der Polachse, also parallel zur Erdachse aufstellen, so fällt sein Schatten unabhängig von der Jahreszeit immer in eine Richtung, die nur vom Drehwinkel der täglichen Erdrotation, also von der wahren Ortszeit und nicht von der Jahreszeit abhängt. Diese Eigenschaft ist für eine Sonnenuhr von unschätzbarem Wert, und das war auch der Grund, warum unsere naive Sonnenuhr im Einführungskapitel im Juli eine andere Zeit anzeigt, als im Februar. Einen dermassen in der Polachse montierten Stab nennt man einen *Polstab* oder mit einer griechischen Bezeichnung *Polos*.

Die im folgenden Bild gezeigte Installation mit einem alten Wagenrad stellt eine primitive Sonnenuhr dar. Die Anordnung wurde so aufgestellt, dass die Radachse einen Polstab bildet. Da die Radebene mit den Speichen senkrecht zu diesem Polstab steht, liegt sie in der Himmelsäquatorebene. Das Rad wird nun so gedreht, dass eine der Speichen den Boden berührt und die ihr entgegengesetzte Speiche zum höchsten Punkt des Rades weist. Diese beiden Speichen liegen dann in der Meridianebene, in der auch der Polstab liegt.

Abbildung 2.2. Wagenrad als Sonnenuhr

Am wahren Mittag, wenn die Sonne ihren Höchststand erreicht, steht sie genau in der Meridianebene. Der Schatten der Radachse fällt dann auf die tiefste Speiche. Das hier verwendete Rad hat 12 Speichen, der Winkel zwischen zwei Speichen beträgt somit 360°/12 = 30°, also gerade den Winkel, den die Sonne in ihrer scheinbaren Bahnebene in zwei Stunden zurücklegt. Zwei Stunden nach ihrem Höchststand ist die Sonne um 30° weiter nach Westen gewandert und steht nun genau in der Ebene, welche die Achse und die der zweitobersten Speiche nach Westen enthält. Im Gegenzug ist der Schatten des Achsenstabes um eine Speiche weiter nach Osten gewandert. Mit dieser einfachen Anordnung kann man den seit dem örtlichen Mittag zurückgelegten Winkel der Sonne und damit die Tageszeit messen.

Sonnenuhren mit Polstab erscheinen in unserem Kulturraum etwa ab dem 16. Jahrhundert. Im arabischen Raum, wo religiöse Vorschriften die Entwicklung der Sonnenuhren kräftig förderten, war er aber schon früher in Gebrauch. Ob schon Ptolomäus im ersten Jahrhundert n.Chr. einen Polos verwendet hat, ist allerdings Spekulation. Wenn Sie also in unseren Breitengraden eine Sonnenuhr sehen, deren Schattenstab schräg nach unten aus der Wand ragt, so können Sie davon ausgehen, dass diese Uhr nach 1500 entstanden ist.

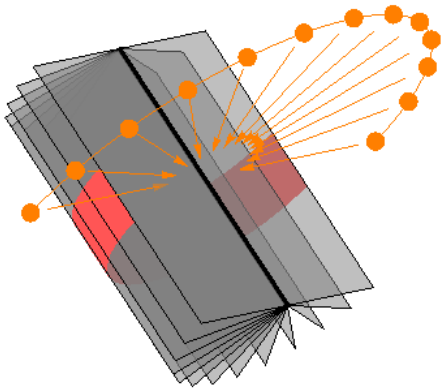
2.2. Die Äquatorialsonnenuhr

Die Äquatorialsonnenuhr ist unter allen Sonnenuhren mit Polstab diejenige, welche das einfachste Zifferblatt besitzt. Sie tritt in zwei Hauptvarianten auf: als zylindrische Ringsonnenuhr und als ebene Uhr. Neben diesen wirklichen Bauformen wird sie uns im Folgenden auch immer wieder als theoretischer Ausgangspunkt bei der Konstruktion anderer Sonnenuhren begegnen und ist somit die eigentliche Mutter aller Sonnuhren.

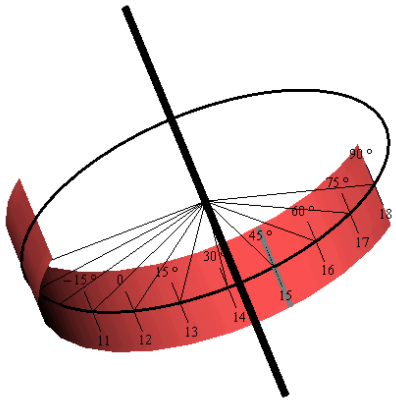
2.2.1. Die äquatoriale Ringsonnenuhr

Genauer als mit einem Wagenrad kann man den Winkel, den die Sonne seit Mittag zurückgelegt hat, mit einem Winkelmessgerät, das in der Himmelsäquatorebene liegt, messen. Zum Verständnis stellen wir uns folgende Anordnung vor:

Abbildung 2.3. Konstruktion einer Äquatorialsonnenuhr



Schattenwurf des Polstabes in stündlichem Abstand. Das rote Band stellt das Winkelmessgerät dar.



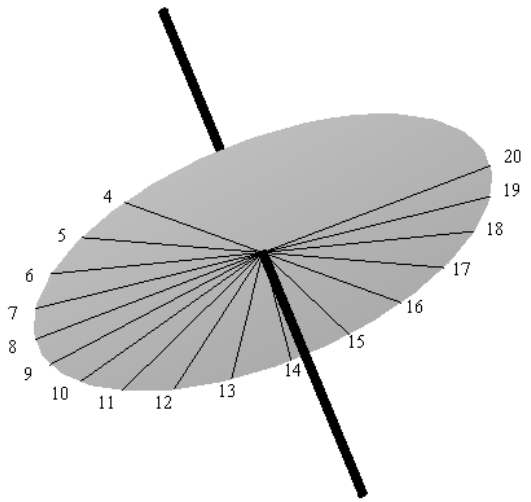
Messung des Richtungswinkels einer Schattenebenen mit Hilfe eines zylindrischen Winkelmessgerätes.

Ein von der Sonne beschienener Polstab erzeugt eine Schattenebene, welche den Polstab enthält und welche von der Sonne weggerichtet ist. Im linken Bild sind die Sonnenstände auf der Himmelsäquatorebene in stündlichem Abstand von 6 Uhr bis 18 Uhr samt den zugehörigen Schattenebenen (graue, durchscheinende Flächen) dargestellt. Zwei benachbarte Schattenebenen schliessen jeweils einen Winkel von 15° ein, denn in einer Stunde legt die Sonne ja vom Beobachter aus gesehen und auf der Äquatorebene gemessen einen Winkel von 15° zurück. Um den Winkel, den eine Schattenebene mit der Meridianebene einschliesst - und damit die wahre Ortszeit - zu messen, konstruieren wir ein Winkelmessgerät in Form eines halben Zylinderringes, dessen Achse mit dem Polstab zusammenfällt (im Bild rot dargestellt). Auf der Innenseite des Ringes ist eine Winkelmessskala wie bei einem Transproteur (Winkelmessgerät für gemometrische Zeichnungen) engebracht. Im Bild rechts sind die Sonnen- und die Schattenebenen weggelassen; was zurückbleibt ist eine *Äquatorialsonnenuhr mit ringförmigem Zifferblatt*. Natürlich kann man statt der Winkeleinteilung auf dem Messring auch gleich die korrespondierende Tageszeiten eintragen (15° entspricht 1 Stunde). In der obigen Graphik sind beide Beschriftungen angebracht.

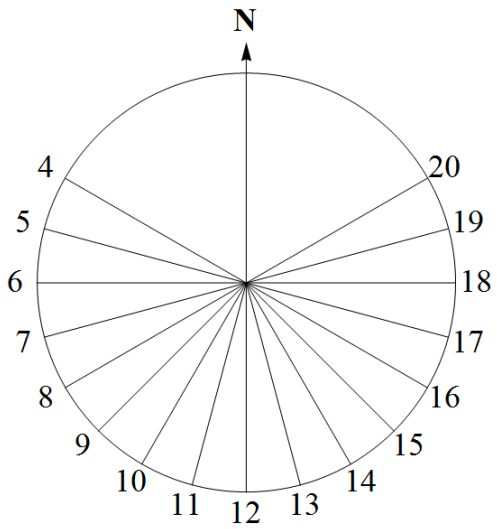
2.2.2. Ebene Äquatorialsonnenuhr

Eine Variante zur Äquatorialsonnenuhr mit ringförmigem stellt die *Äquatorialsonnenuhr mit ebenem Zifferblatt* dar. Man erhält sie, wenn man den Messring durch eine kreisförmige Messscheibe ersetzt (Bild links).

Abbildung 2.4. Ebenes Äquatorialzifferblatt



Äquatorialsonnenuhr mit ebenem Zifferblatt



Das ebene Äquatorial-
zifferblatt im Grundriss

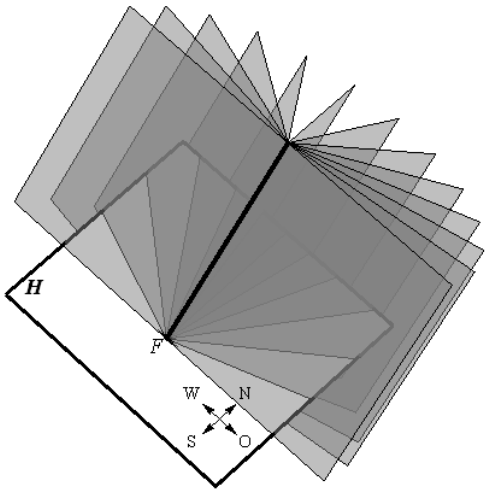
Das ebene Äquatorialzifferblatt ist nichts anderes als das Zifferblatt unserer naiven Sonnenuhr im Einführungskapitel. Das Problem dort war bloss, dass der Schattenstab und das Zifferblatt falsch montiert waren. Hätten wir die ganze Einrichtung um 43° um die west-östliche Achse gedreht, hätte sie mindestens die korrekte Ortszeit angezeigt.

Die Zifferblattebene der Äquatorsonnenuhr steht senkrecht zum Polstab und liegt somit in der lokalen Äquatorebene. Im Sommerhalbjahr, zwischen Flühlings- und Herbst-Tagundnachtgleiche, ist die Deklination der Sonne positiv, das heisst, dass die Sonne das Zifferblatt von oben bescheint. Im Winterhalbjahr hingegen ist die Deklination negativ, und das bedeutet, dass die Unterseite des Zifferblattes beleuchtet ist. Eine ebene Äquatorsonnenuhr muss also auf beiden Seiten der Zifferblattebene eine Skala tragen. Anlässlich der beiden Tagundnachtgleichen steht die Sonne scheinbar in der Äquatorebene, das bedeutet, dass sie quasi auf den Rand des Zifferblattes scheint. In ein paar Tagen vor und nach den Tagundnachtgleichen kann die ebene Äquatorsonnenuhr überhaupt nicht abgelesen werden. Aus diesem Grund ist diese Bauform nur schwer abzulesen und wird daher recht selten realisiert. Ihre Hauptbedeutung ist, wie schon erwähnt, theoretischer Art, nämlich als Ausgangspunkt für die Konstruktion anderer Sonnenuhren.

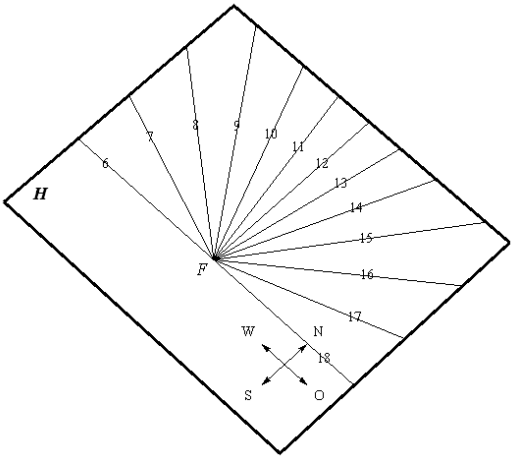
2.3. Die horizontale Sonnenuhr

In der Einleitung haben wir gesehen, dass die Anzeige einen naiven Sonnenuhr mit einem vertikalen Schattenstab beträchtlichen tageszeitlichen und jahreszeitlichen Schwankungen unterliegt. In diesem Abschnitt werden wir lernen, wie eine solche Gartensonnenuhr mit einem Polstab korrekt gebaut werden muss. Dazu müssen wir bestimmen, wohin der Schatten des Polstabes zu den vollen Stunden wahrer Ortszeit fällt. Das ist relativ einfach: Wir müssen bloss die vom Polstab stündlich erzeugten Schattenebenen mit der horizontalen Zifferblattebene H schneiden. Das ergibt dann folgende Bilder

Abbildung 2.5. Zifferblatt einer horizontalen Sonnenuhr



Das Schattenbüschel des Polstabes schneidet die horizontale Zifferblattebene **H**



Das resultierende Schnittlinienbild liefert das Zifferblatt der Sonnenuhr

Wie fertigt man nun das Zifferblatt in der Abbildung oben rechts an? Dazu gibt es verschiedene Verfahren: Im Folgenden betrachten wir ein empirisches, ein konstruktives und ein rechnerisches.

2.3.1. Das empirische Verfahren

Das empirische Vorgehen erfordert keine mathematischen Kenntnisse. Wir führen folgende Schritte aus:

1. Bestimmen der Meridianlinie

   Nachdem ein ebener, gut besonnter Platz für die Sonnenuhr hergrichtet worden ist, wählt man den Fusspunkt des Polstabes nahe am südlichen Rand des Platzes, etwa in der Mitte seiner Ost-West-Ausdehnung. Nun muss man die Meridianlinie durch den Stabfusspunkt genau in der Nord-Süd-Richtung besstimmen. Das kann mit einem guten Kompass bewerkstelligt werden, wobei die magnetische Missweisung zu berücksichtigen und darauf zu achten ist, dass keine Eisen- oder Stahlkonstruktionen in der Nähe den Kompass stören. Für den Hobbysonneuhrbauer einfacher ist eine Methode, welche die Sonne selber zu Hilfe nimmt:

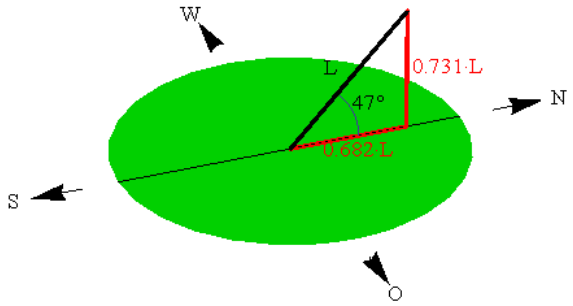
   An einem sonnigen Tag steckt man einen Stab senkrecht in den Stabfusspunkt. Zur Zeit des örtlichen wahren Mittags steht die Sonne am südlichen Himmel in der Meridianebene, weshalb der Schatten des Stabes genau nach Norden fällt. Den genauen Zeitpunkt des wahren Mittags kann aus den Zeiten der Sonnenaufganges und des -unterganges, welche in vielen Lokalzeitungen publiziert werden berechnen: Der wahren Mittags liegt nämlich genau in der Mitte der Zeitspanne zwischen dem Aufgang und dem Untergang der Sonne. Alternativ kann man den Zeitpunkt des wahren Mittags auch mit der im Abschnitt über die Zeit erläuterten Formeln berechnen.

2. Montage des Polstabes

Nun wird der Polstab so montiert, dass er in Richtung der Meridianline nach Norden schräg nach oben weist. Der Winkel mit der horizontalen Meridianlinie muss gleich der geographischen Breite sein. In Luzern beträgt dieser Winkel, wie schon mehrmals erwähnt, 47°, ein Wert, der mit akzeptabler Genauigkeit sogar in der ganzen Deutschschweiz verwendet werden kann.

Für die Winkelmessung kann man einen grossen Transporteur verwenden, sofern ein solcher verfügbar ist. Bequemer ist es wohl, ihn mit der folgenden, für Luzern gültigen Regel einzurichten: Die Stabspitze muss genau über der Meridianline auf einer Höhe sein, die 73% der Stablänge beträgt.

Abbildung 2.6. Montierung des Polstabes für eine horizontale Sonnenuhr in Luzern



3. Markieren des Zifferblattes

   Wenn der Polstab korrekt montiert ist, läuft eigentlich die Sonnenuhr bereits. Wir können daher an einem sonnigen Tag in stündlichem Abstand den Schatten beobachten, auf der Zifferblattebene markieren und mit der entsprechenden Zeit beschriften. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

   a. Wenn wir eine Sonnenuhr für *wahre Ortszeit*, wie sie bis zum Ende des 19. Jahrunderts verbreitet war, haben möchten (z.B. zur Restaurierung einer historischen Uhr), so ist für Markierung der Stunden vom örtlichen wahren Mittage auszugehen. Wenn der wahre Mittag z.B. um 12.20 Uhr MEZ stattfindet, so markiert man den Schatten um 6.20 Uhr MEZ und bezeichnet ihn mit 6 Uhr, dann wieder um 7.20 Uhr MEZ und bezeichnet ihn mit 7 Uhr usw. bis Sonnenuntergang.

   b. Wenn wir aber eine Uhr vorziehen, die über das ganze Jahr betrachtet möglichst wenige von der mitteleuropäischen Zeit abweicht, so können wir auch mit Hilfe unserer Armbanduhr zu den vollen Stunden den Schatten des Polstabes markieren und mit der entsprechenden Uhrzeit beschriften. Dabei ist allerdings zu beachten, dass damit der Effekt der Zeitgleichung nicht berücksichtigt ist. Es empfiehlt es sich daher, für diese Arbeit wenn möglich einen Tag zu wählen, an dem die Zeigleichung einen sehr kleinen Wert hat, also etwa Mitte April, Mitte Juni oder anfangs September, damit man eine Sonnenuhr kriegt, bei der die durch die Zeitgleichung bedingte Fehlanzeige gleichmässig über das Jahr verteilt ist. Wenn man die Marikierung nicht an den erwähnten Tagen vornehmen kann, muss man die Ablesezeitpunkte anpassen, indem man den Wert der Zeitgleichung für den Ablesetag zum Ablesezeitpunkt addiert. Die von einer solchen Sonnenuhr angezeigt Zeit weicht dann im Verlauf des Jahres höchstens eine Viertelstunde von Mitteleuropäischen Zeit ab. Wie man ein Zifferblatt für die korrekte mittel-

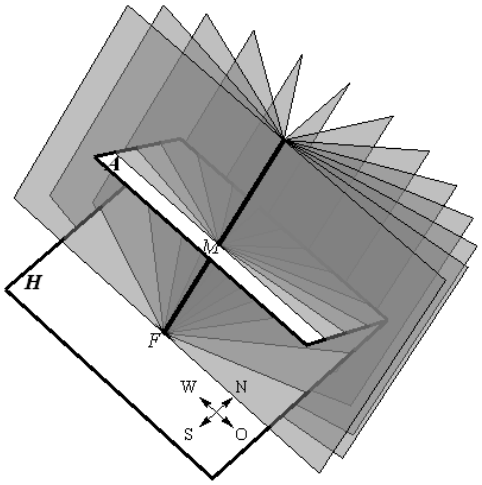
europäische Zeit unter Berücksichtigung der Zeitlgleichung konstruiert, wird im Kapitel 3 beschrieben.

2.3.2. Das konstruktive Verfahren

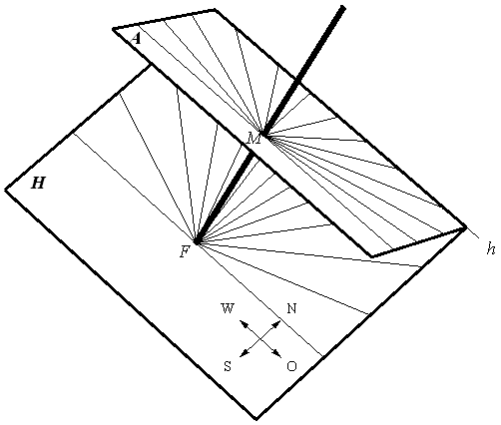
Das obige empirische Verfahren zum Zeichnen des Zifferblattes taugt vor allem für grössere Horizontalsonnenuhren im Freien. Alternativ kann man die Stundenlinien auch geometrisch konstruieren.

Zum Verständnis dieses Verfahrens rufe man sich die linke Zeichnung in Abbildung 2.5 in Erinnerung. Zwei benachbarte Schattenebenen, welche vom Polstab im Abstand von einer Stunde erzeugt werden, schneiden sich im Polstab unter einem, in der Äquatorebene gemessenen Winkel von 15°. Wir schneiden also die Schattenebenen mit einer zum Polstab senkrecht stehenden Ebene *A*, also mit einer Äquatorebene. Diese schneidet das Büschel der Schattenebenen in einem Geradenbüschel, welches ein ebenes Äquatorzifferblatt darstellen. In einem solchen bilden die Stundenlinien ein Büschel von Geraden, welch sich unter einem Winkel von 15° schneiden, was einfach zu zeichnen ist.

Abbildung 2.7. Zur Konstruktion des horizontalen Zifferblattes



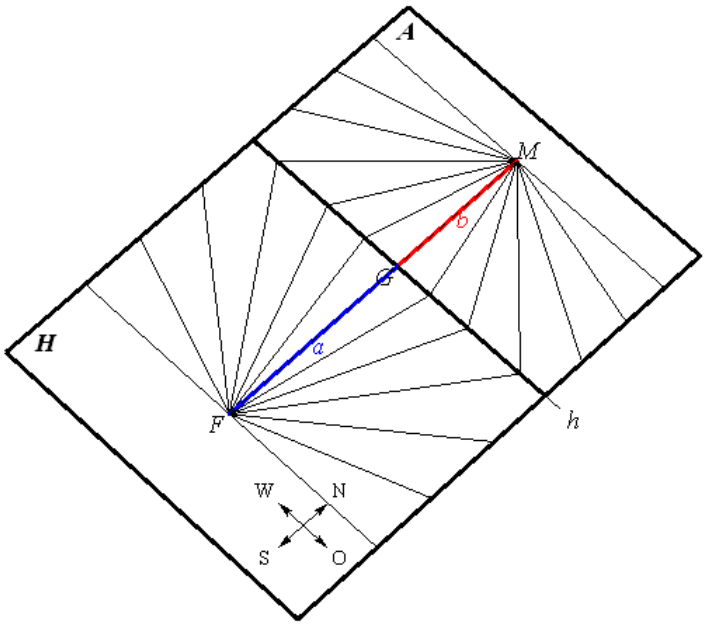
Schnitt der stündlichen Schattenebenen des Polstabes mit eine horizontalen Ebene H und einer Äquatorebene A



Resultierendes Schnittlinienbild

Nun klappen wir die Äquatorebene *A* um die Schnittgerade h nach Norden in die horizontale Zifferblattebene *H* um. Das sieht dann wie folgt aus:

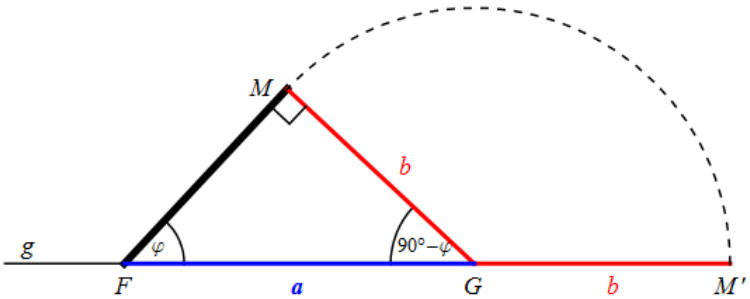
Abbildung 2.8. Resultat der Umklappung im Grundriss



Sei nun *F* das Zentrum des zu konsturierenden horizontalen Zifferblattes und *M* das Zentrum des Äquatorzifferblattes. *a* und *b* sei die Abstände von *F* resp. *M* zur Schnittgeraden *h*.

Der Abstand *a* kann frei gewählt werden und ist ein Mass für die Grösse des gesuchten Zifferblattes. Um den Abstand *b* zu bestimmen, betrachten wir den Vorgang des Umklappens im Seitenriss von Osten her gesehen.

Abbildung 2.9. Umklappen der Äquatorebene in die Zifferblatttebene



Seitenriss von Osten her gesehen. Die Strecke FM ist der Polstab,
FM' die Horizontalebene und GM die Äquatorebene im Seitenriss.

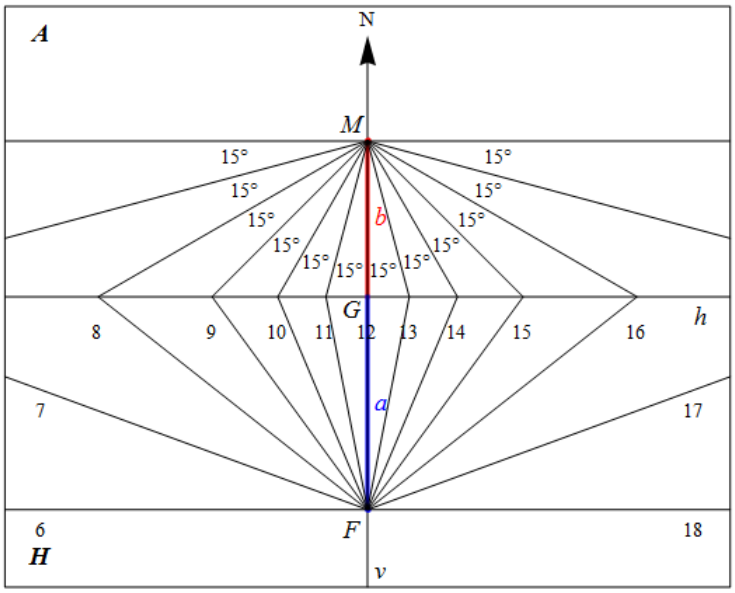
Die Konstruktion des Zifferblattes führen wir in zwei Teilen durch:

1. Zuerst konstruieren wir den Abstand *b*, gestützt auf obige Skizze. Wir zeichnen nahe beim unteren Rand der Zeichenfläche einer horizontalen Geraden *g* und tragen auf ihr die Punkte *F* und *G* im gewählten Abstand *a* ein. Durch *F* ziehen wir eine Gerade, welche mit der Geraden *g* den Winkel φ (= geographische Breite, für Luzern = 47°) bildet und durch *G* eine Gerade, welche mit *g* den Winkel 90° - φ bildet. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sei *M*.

Dann ist die Strecke *GM* der gesuchte Abstand *b*.

2. Nun wird in einem zweiten Schritt das eigentliche Zifferblatt konstruiert. Wir zeichnen dazu eine horizontale Gerade *h* und eine vertikale Gerade *v*, die sich etwa in der Mitte der Zeichenfläche im Punkt *G* schneiden.

Abbildung 2.10. Konstruktion des horizontalen Zifferblattes



Von *G* aus tragen wir auf *v* nach unten die Strecke *a* und nach oben die Strecke *b* ab und erhalten so die beiden Punkte *F* resp. *M*.

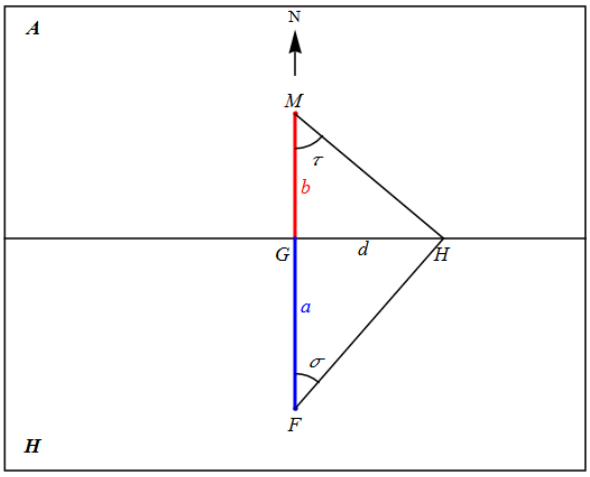
Nun zeichnen wir von *M* aus eine Äquator-Zifferblatt mit Stundenlinien, die sich im Winkelabstand von 15° folgen, wie im Bild Abbildung 2.10 gezeigt. Die Schnittpunkten dieser Äquator-Stundenlinien mit der Geraden *h* verbinden wir anschliessend mittels Geradenstücken mit *F*. Diese Verbindungslinien stellen das Zifferblatt der ebenen, horizontalen Sonnenuhr dar.

Selbstverständlich kann man die Konstruktion auch in einem geeigneten Masstab durchführen. In der Sonnenuhrenliteratur werden die beiden Teile der Konstruktion meist in eine einzige Zeichnung integriert; sie wurden hier zum besseren Verständnis aufgeteilt.

2.3.3. Das rechnerische Verfahren

Im Zeitalter der Computer drängt sich wohl eine rechnerisches Verfahren auf, besonders wenn mit einem digitalen Plotter das gewünschte Zifferblatt gleich automatisch gezeichnet werden kann. Um ein solches Verfahren zu entwickeln, vollziehen wir das oben beschriebene konstruktive Verfahren rechnerisch nach. Im Folgenden Bild ist die oben beschriebene Konstruktion der Zifferblattlinie für Stundenwinkel τ dargestellt. Gesucht ist der Winkel σ, den die Zifferblattlinie mit der Meridianlinie einschliesst.

Abbildung 2.11. Zur Berechnung des Zifferblattwinkels σ



Wieder betrachten wir a als gegeben. Wir erinnern uns: Die Sonne dreht sich um die Polachse pro Stunde um 15°. Wir können daher den Stundenwinkel τ aus der wahren Ortszeit t wie folgt berechnen.

$$\tau = (t - 12) \cdot 15° \tag{2.1}$$

Vormittagsstunden ergeben negative, Nachmittagsstunden positive Winkel.

Der Zeichnung entnehmen wir, dass einerseits $d = b \cdot \tan(\tau)$, und andererseits auch $d = a \cdot \tan(\sigma)$ ist. Daher gilt

$$a \cdot \tan(\sigma) = b \cdot \tan(\tau) \tag{2.2}$$

oder

$$\tan(\sigma) = \frac{b}{a} \tan(\tau) \tag{2.3}$$

Wieder betrachten wir a als gegeben. Der Figur von Abbildung 2.9 entnehmen wir, dass $b = a \cdot \sin(\varphi)$ ist. Dieser Wert für b in die letzte Gleichung eingesetzt und mit a gekürzt liefert die gesuchte Formel

$$\tan(\sigma) = \sin(\varphi) \tan(\tau) \tag{2.4}$$

Weil der Tangenswert für den Winkel 90° nicht definiert ist, taugt die Formel für die Stundenwinkel $\tau = \pm 90°$, welche den wahren Ortszeiten für 6.00 Uhr und 18.00 Uhr entsprechen, nicht. Wenn man das Büschel des Schattenebenen in der Abbildung 2.5 betrachtet, wird unmittlbar klar, dass in diesen beiden Fällen auch der Zifferblattwinkel 90° beträgt.

Ferner ist zu bedenken, dass die Tangensfunktion nicht umkehrbar eindeutig ist: Winkel, die sich um genau 180° unterscheiden, haben denselben Tangenswert. Für Winkel τ, welche zwischen $-90°$ und $90°$ liegen, liefert die Formel

$$\sigma = \arctan(\sin(\varphi)\tan(\tau)) \tag{2.5}$$

den korrekten Wert. Wenn aber $\tau > 90°$ ist, so liefert die obige Formel fälschlicherweise einen negativen Winkel und man muss dann zu diesem $180°$ addieren. Entsprechend liefert die Formel für $\tau < -90°$ eine positiven Winkel, von welchem 180° zu subtrahieren ist.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass das Zifferblatt einer horizontalen Uhr symmetrisch zur Mittagslinie ist. Es genügt also, die Zifferblattwinkel für den Nachmittag zu berechnen, die Vormittagsmarken liegen dann symmetrisch zu diesen. In der folgenden Tabelle sind die Zifferblattwinkel für die vollen Nachmnittagsstunden (WOZ) für den Standort Luzern ($\varphi = 47°$) zusammengestellt

Tabelle 2.1. Zifferblattwinkel für die vollen Stunden wahrer Ortszeit auf einem horizontalen Zifferblatt in Luzern

WOZ	τ	σ
12 Uhr	0°	0°
13 Uhr	15°	11.1°
14 Uhr	30°	22.9°
15 Uhr	45°	36.2°
16 Uhr	60°	51.7°
17 Uhr	75°	69.9°
18 Uhr	90°	90°
19 Uhr	105°	110.1°
20 Uhr	120°	128.3°

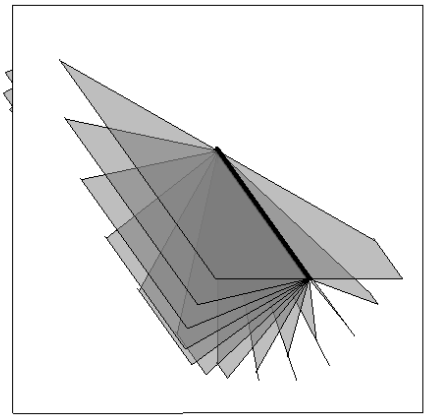
Die 20 Uhr-Marke wir nie überschritten, denn auf der Breite von Luzern findet der späteste Sonnenuntergang um ca. 19.50 Uhr WOZ statt.

2.4. Die vertikale Sonnenuhr

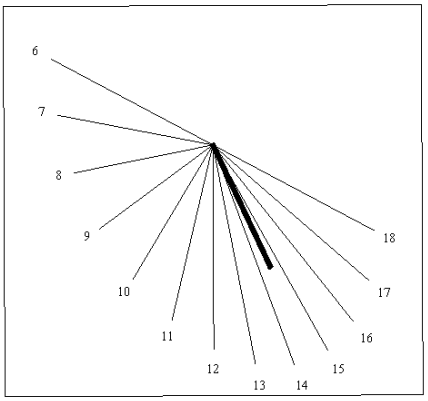
Der Polstab jeder Sonnenuhr für die wahre Ortszeit muss immer parallel zur Erdachse sein. Lokal betrachtet heisst das, dass er in der örtlichen Meridianebene liegt (und nicht etwa, was man leider gelegentlich auch sieht in einer zur Zifferblattwand senkrechten Ebene!). Mit der horizontalen Ebene bildet er einen Winkel, der gleich der geographischen Breite des Standortes ist. Den Winkel α, den die Wand mit der von Norden nach Süden ausgerichteten Meridianebene bildet, nennt man die *Abweichung* der Wand. Dabei werden Abweichungen nach Westen positiv, jene nach Osten negativ gezählt.

Die Grundidee, dass nämlich die um den Polstab mit gleichmässiger Geschwindigkeit rotierende Sonne eine Schattenebene wirft, deren Schnittgeraden mit der Zifferblattebene zu vollen Stunden die Stundenlinien der Sonnenuhr ergeben, ist dieselbe wie bei der horizontalen Sonnenuhr.

Abbildung 2.12. Zifferblatt einer vertikalen, aus der Südorientierung nach Westen abweichenden Sonnenuhr



Das Schattenbüschel des Polstabes schneidet die vertikale, aus der Sürichtung abweichende Zifferblattebene



Das resultierende Schnittlinienbild liefert das Zifferblatt der Sonnenuhr

Beachten Sie, dass nun das Zifferblatt offensichtlich nicht symmetrisch ist! Die 12-Uhr-Linie ist vertikal, denn am wahren Mittag steht die Sonne in der Meridianebene, welche ja auch den Polstab enthält.

Wir betrachten wieder zuerst ein empirisches, danach ein konstruktives und schliesslich ein rechnerisches Verfahren zum Erzeugen von solchen Zifferblättern.

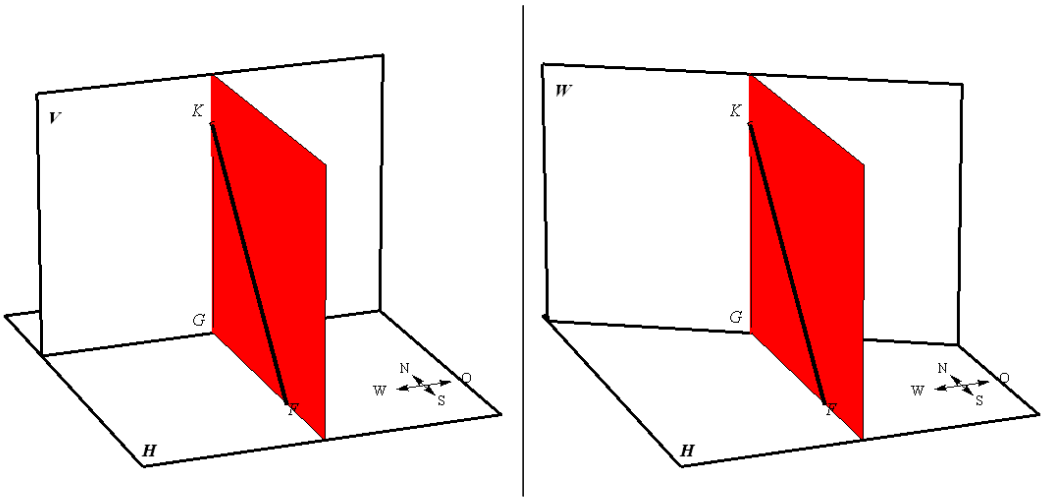
2.4.1. Das empirische Verfahren

Die Basis für das empirische Verfahren ist immer die korrekte Montage des Polstabes. Der Rest ist dann trivial, kann man doch danach einfach zu den vollen Stunden den Schatten des Stabe markieren. Während bei der horizontalen Sonnenuhr die Kernaufgabe der Monatage des Polstabes relativ einfach ist, bietet diese bei einem abweichenden Zifferblatt etwas mehr Probleme. Der Grund dafür ist, dass die Meridianebene mit dem Polstab nicht senkrecht zur Zifferblattebene steht, sondern mit ihr den Winkel α bildet.

Wir stellen hier zwei mögliche Methoden vor, die erste geht davon aus, dass der Abweichungswinkel α bekannt ist, die zweite funtkioniert auch ohne diese Voraussetzung. Beide Verfahren gehen von derselben Idee aus:

Wir stellen uns zuerst eine genau nach Süden ausgerichtete, vertikale Wand V und eine horizontale Ebene H vor (linkes Bild in der folgenden Abbildung). An der Wand V sei im Punkt K ein Polstab befestigt. Der Polstab liegt der Meridianeben (rot eingezeichnet), welche senkrecht sowohl auf V wie auch auf H steht. Die Meridianebene schneidet die Wand in einer vertikalen Geraden, welche den Punkt K enthält. G sei der gemeinsame Schnittpunkt der horizontalen Ebene, der vertikalen Ebene und der Meridianebene, wie im folgenden Bild gezeigt.

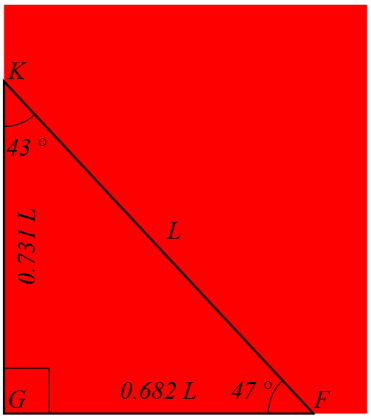
Abbildung 2.13. Montage des Polstabes einer aus der Südorientierung abweichenden Sonnenuhr



Nun drehen wir in Gedanken die nach Süden orientierte Wand an der Achse *KG* um den Winkel α nach Westen, wobei natürlich die Meridianebene mit dem Polstab fest bleibt. Jetzt bildet die Meridianebene mit der Sonnenuhrwand einen Winkel von $90° - \alpha$.

Aus dieser Überlegung können wir ein Verfahren zur Montage des Polstabes ableiten:

1. Auf ein planes, rechteckiges Brett zeichnen wir den Polstab über eine Ecke so, wie er in der Meridianebene montiert würde. Das ist im folgenden Bild für eine Sonnenuhr mit geographischer Breite 47° (Luzern) gezeigt. Die Distanz des unteren Endes des Polstabes von der unteren linken Ecke beträgt 68.2 % (= cos(47 °)) der Länge des Polstabes, jene des oberen Endes 73.1 % (= sin(47 °)).



2. Nun markieren wir den Befestigungspunkt *K* des Polstabes an der Wand und von diesem aus die Lotlienie. Anschliessend montieren wir das Brett mit dem gezeichneten Polstab beim Punkt *K* entlang der Lotlinie provisorisch senkrecht zur Zifferblattwand, wie im linken Bild von Abbildung 2.13 gezeigt.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a. Wenn die Ausrichtung der Wand ist bekannt ist und der Winkel der Wandnormalen zur Meridianebene α ist, drehen wir das Brett an der Lotlinie um den Winkel α in die Gegenrichtung. Damit kommt das Brett in die Meridianebene zu liegen.

Diese Situation liegt sicher dann vor, wenn die Sonnenuhr an einem Neubau angebracht werden soll, denn dann kann man vom Architekten eine Kopie des Situationsplanes anfordern. Auch bei bestehenden, nicht allzu alten Gebäuden sind solche Pläne häufig noch vorhanden. Bei älteren Gebäuden kann man auf die Daten der Grundbuchverwaltung zurückgreifen. Heutzutage stehen die Grundbuchpläne sogar über das Internetportal der kantonalen Vermessungsdienste zur Verfügung, im Kanton Luzern z.B. unter *http://www.geo.lu.ch/map/grundbuchplan/*.

b. Wenn die genaue Ausrichtung der Wand nicht in Erfahrung gebracht werden kann, so können wir das Brett auch mit Hilfe der Sonne selber in die Meridianebene drehen. Dazu bestimmen wir an einem sonnigen Tag den Zeitpunkt des wahren Mittags. Diesen können wir gewissen Tageszeitungen oder einem astronomischen Jahrbuch entnehmen, oder aber mit Hilfe der Formel Gleichung 1.33 berechnen, wobei für WOZ der Wert 12 einzusetzen ist.

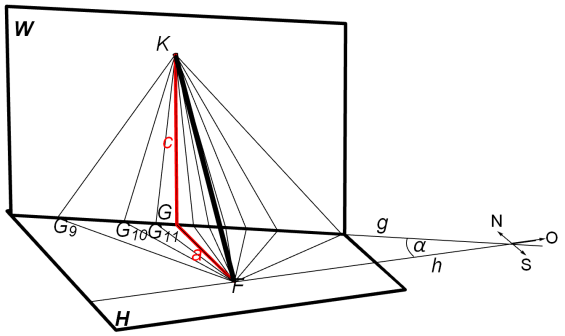
   Am wahren Mittag drehen wir das Brett um die Lotlinie so weit, bis der Schatten des Brettes auf der Wand verschwindet.

Wenn das Brett in dieser Position fixiert worden ist, können wir den Polstab entlang der auf dem Brett gezeichneten Vorlage montieren.

2.4.2. Das konstruktive Verfahren

Zur Konstruktion einer vertikalen Sonnenuhr gehen wir von einer horizontale Sonnenuhr in der Ebene H gemäss Abschnitt 2.3.2 aus und stellt in Gedanken eine vertikale Ebene W auf sie, welche um den gewünschten Winkel α aus der Südrichtung abweicht.

Abbildung 2.14. Kombination einer horizontalen und einer abweichend vertikalen Sonnenuhr

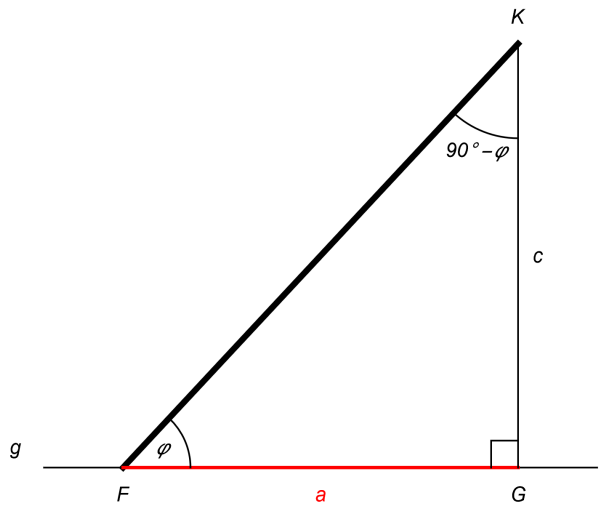


Die Schnittgerade von W mit H sei g. Die Meridianeben, welche den Polstab enthält, schneidet g im Punkt G, der Polstab schneidet die Horizontebene in F und die Zifferblattebene in K.

Bei jedem Sonnenstand verläuft nun der Schatten des Polstabes von F aus auf der horizontalen Sonnenuhr bis zur Schnittgeraden g und von dort aus nach K. Man bestimmt daher die Schnittpunkte G_h (im Bild sind nur G_9, G_{10} und G_{11} bezeichnet.)jeder Stundenlinie der Horizontaluhr mit der Schnittgeraden g der beiden Ebenen und verbindet diese mit dem Zentrum K der Vertikaluhr.

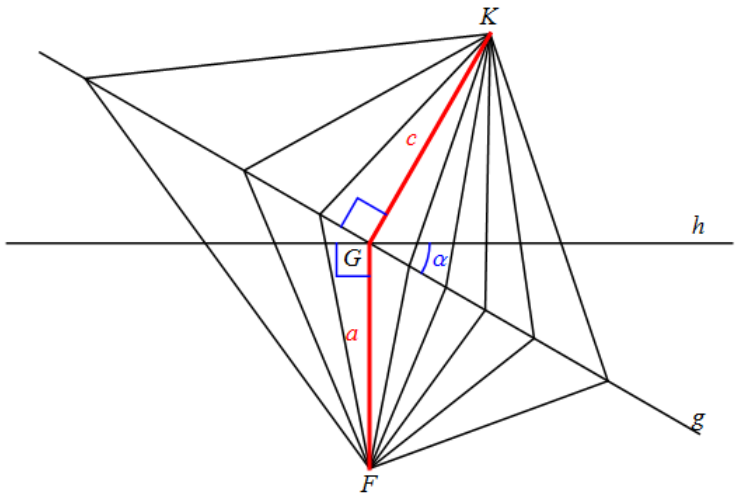
Der Blick auf die obige Figur führt zu folgender Konstruktion:

1. Wir betrachten die Meridianebene mit dem Polstab:



   Durch die Wahl der Strecke c legen wir die Grösse des Zifferblattes fest. Um die Strecke a zu konstruieren, wird bei G ein rechter Winkel und bei K der Winkel $90° - \varphi$ abgetragen. Ihr Schnittpunkt F mit dem Horizontalzifferblatt liefert die Strecke $a = \overline{FG}$.

2. Wir zeichen eine Gerade h und im Abstand a von ihr den Punkt F. Nun konstruieren wir eine horizontale Sonnenuhr gemäss Abschnitt 2.3.2 mit Zentrum F.



3. Im Schnittpunkt G der Mittagslinie mit der Geraden h zeichnen wir eine Gerade g, welche h im Winkel α schneidet.

4. Nun wird von G aus senkrecht zu g die Strecke c abgetragen. Das liefert das Zentrum K der Vertikaluhr.

5. Die Verbindungsstrecken zwischen K und den Schnittpunkten der Stundenlinien der Horizontaluhr mit g sind die Stundenlinien der Vertikaluhr.

2.4.3. Das rechnerische Verfahren

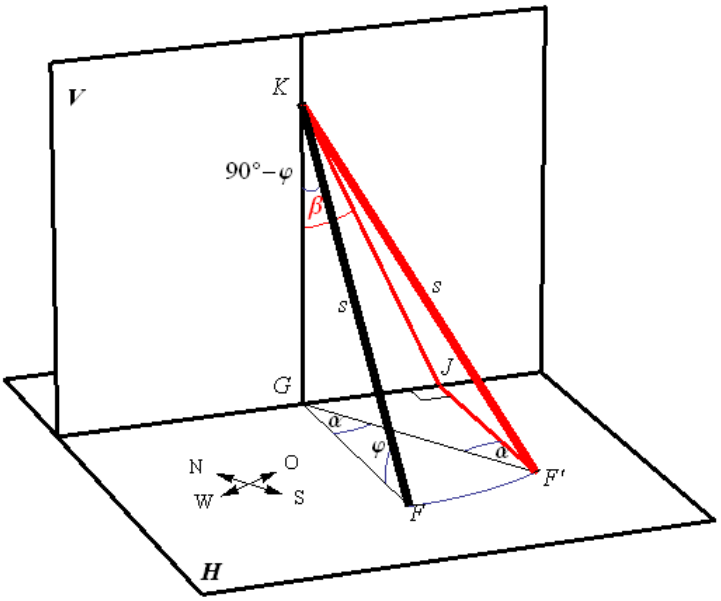
Bei der Herleitung des rechnerische Verfahrens folgen wir dem konstruktiven Verfahren. Allerdings sind dazu etwas umfangreichere Trigonometriekenntnisse (Sinussatz) erforder-

lich. Wer diese Voraussetzung nicht mitbringt, kann natürlich die Herleitung überspringen und dem Ergebnis vertrauen.

2.4.3.1. Berechnung des Polstabes

Wir gehen von der schon im Abschnitt über das empirische Verfahren verwendeten Idee aus, den Polstab zunächst provisorisch in einer senkrecht zu Wand stehenden, vertikalen Ebene (wie bei einer Süduhr) zu montieren und ihn dann um die vertikale Achse, welche den Befestigungspunkt enthält, in die Meridianebene zu drehen.

Abbildung 2.15. Montage des Polstabes bei einer abweichenden Sonnenuhr



Nehmen wir an, die vertikale Wand V weiche um den Winkel α nach *Westen* ab. Im Punkt K ist der Schattenstab der Länge s an der Wand befetigt. KF sei der provisorisch in einer vertikalen, senkrecht auf der Zifferblattebene stehenden Ebene montierte Stab, der mit der Wand den Winkel $90° - \varphi$ einschliesst. KG sei das vom Befestigungspunkt des Stabes gefällte Lot. Nun wird der Stab an der Achse KG um den Winkel α nach *Osten* gedreht. Der gedrehte Stab KF' liegt nun in der Meridianebene und ist somit ein Polstab.

Wir wollen nun die senkrechte Projektion KJ des Polstabes auf die Wand V, die sogenannt *Subpolare*, sowie den Abstand der Spitze F' von der Wand, also die Strecke $F'J$, bestimmen.

Im rechtwinkligen Dreieck KGF gilt

$$\overline{KG} = s \cdot \sin(\varphi) \tag{2.6}$$

$$\overline{GF} = s \cdot \cos(\varphi) \tag{2.7}$$

F und F' liegen auf einem Kreis mit Zentrum G. Deshalb ist auch

$$\overline{GF'} = s \cdot \cos(\varphi) \tag{2.8}$$

Die Winkel FGF' und $GF'J$ sind Wechselwinkel und somit gleich. Im rechtwinkligen Dreieck GJF' gilt daher

$$\overline{GJ} = \overline{GF'} \cdot \sin(\alpha) = s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) \tag{2.9}$$

und

$$\overline{F'J} = \overline{GF'} \cdot \cos(\alpha) = s \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) \tag{2.10}$$

Damit können wir nun die Stabspitze lokalisieren.

Die geographischen Breite des Standortes sei φ. Wenn der Stab die Länge s hat und die Wand um den Winkel α aus der Südrichtung abweicht, so messen wir vom Befestigungspunkt K aus

- $s \cdot \sin(\varphi)$ vertikal nach unten
- $s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha)$ horizontal nach rechts, wenn die Wand nach Westen abweicht und ebensoviel nach links, wenn sie nach Osten abweicht
- $s \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha)$ senkrecht zur Wand noch vorne

Der so konstruierte Punkt ist die Spitze des Polstabes

Nun wollen wir noch die Länge der Subpolaren $\overline{KJ}$ sowie deren Winkel β mit der Fallgeraden bestimmen. Im rechtwinkligen Dreieck KGJ gilt nach Pythagoras

$$\overline{KJ}^2 = \overline{KG}^2 + \overline{GJ}^2 \tag{2.11}$$

daraus

$$\overline{KJ} = \sqrt{(s \cdot \sin(\varphi))^2 + (s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha))^2} \tag{2.12}$$

Nach einer kleinen Vereinfachung erhalten wir die Länge der Subpolaren

$$\overline{KJ} = s \cdot \sqrt{(\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha))^2} \tag{2.13}$$

Ihren Winkel β mit der Fallgeraden KG erhalten wir aus der Beziehung

$$\tan(\beta) = \frac{\overline{GJ}}{\overline{KG}} = \frac{s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha)}{s \cdot \sin(\varphi)} = \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\varphi)} \tag{2.14}$$

Nun wird β immer zwischen $-90°$ und $+90°$ liegen, weshalb hier gefahrlos auf den Arcustangenswert übergegangen werden kann.

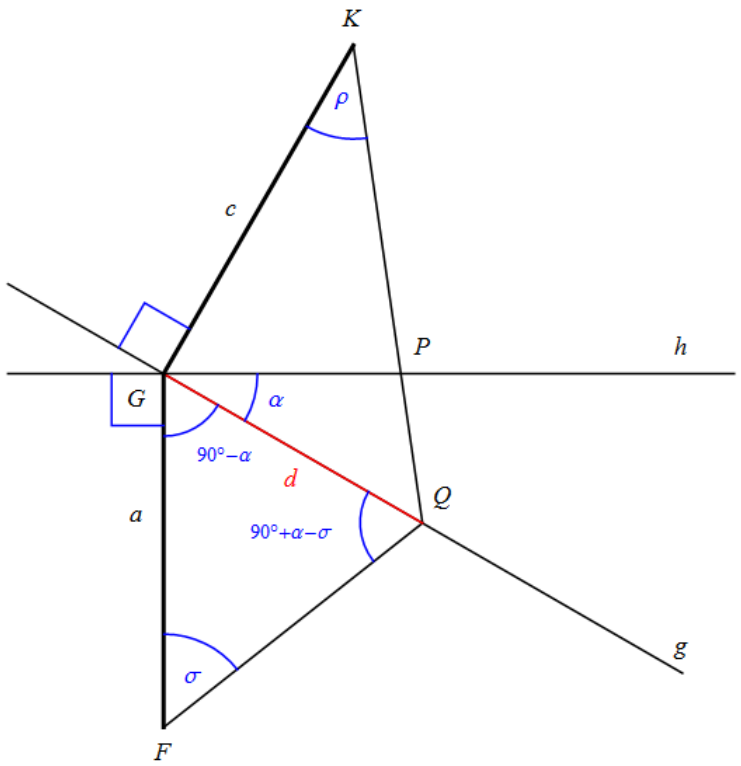
$$\beta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\varphi)}\right) \tag{2.15}$$

2.4.3.2. Berechnung des Zifferblattes

Den zum Stundenwinkel τ der Sonne gehörigen Winkel σ der Stundenlinie auf der Horizontaluhr können wir mit Hilfe der Formel Gleichung 2.4 berechnen. Nun betrachten wir die im

letzten Abschnitt gezeigte Konstruktion einer einzelnen Stundenlinie auf der abweichenden Vertikaluhr.

Abbildung 2.16. Disposition zur Berechnung der Stundenlinie auf dem abweichenden Zifferblatt



Die Strecke GQ gehört sowohl zum Dreieck FGQ, wie auch zum Dreieck KGQ. Wir drücken GQ nun einerseits durch den Winkel σ der Stundenlinie auf horizontalen Sonnenuhrund und andererseits durch den Winkel ρ der entsprechenden Stundenlinie auf der vertikalen Sonnenuhr aus.

Im Dreieck FGQ ist der Winkel σ aus der letzten Berechnung bekannt, der Winkel bei G ist der Komplementwinkel zum Abweichungswinkel α und der Winkel bei Q folgt aus dem Winkelsummensatz im Dreieck. Nun gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin(\sigma)}{\sin(90° + \alpha - \sigma)}$$

und nach einer elementaren Umformung

$$d = \frac{a \cdot \sin(\sigma)}{\cos(\sigma - \alpha)}$$

Im Dreieck KGQ gilt

$$d = c \cdot \tan(\rho)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt somit

$$\frac{a \cdot \sin(\sigma)}{\cos(\alpha - \sigma)} = c \cdot \tan(\rho)$$

daraus

$$\tan(\rho) = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin(\sigma)}{\cos(\sigma - \alpha)}$$

Nun ist ja a die Distanz des Zentrums des horizontalen Zifferblattes und c die Distanz des Zentrums des vertikalen Zifferblatte von der Schnittgeraden. Aus der Zeichnung unter Punkt 1 des konstruktiven Verfahrens entnehmen wir

$$\frac{a}{c} = \cot(\varphi) = \frac{1}{\tan(\varphi)}$$

Wir setzen diesen Wert in die vorhergehende Gleichung ein und erhalten damit die Beziehung

$$\tan(\rho) = \frac{\sin(\sigma)}{\tan(\varphi)\cos(\sigma - \alpha)} \tag{2.16}$$

Zusammenfassend ergibt sich somit für die nördliche Halbkugel der Erde ($\varphi > 0$) das folgende Verfahren

1. Wir bestimmen zuerst den zum Stundenwinkel τ der Sonne gehörigen Winkel σ der Stundenlinie auf der *Horizontaluhr* wie folgt:

   - Wenn $-90° < \tau < 90°$ ist

     $$\sigma = \arctan(\sin(\varphi)\tan(\tau))$$

   - Wenn $\tau = \pm 90°$ ist

     $$\sigma = \tau \tag{2.17}$$

   - Wenn $\tau > 90°$ ist

     $$\sigma = \arctan(\sin(\varphi)\tan(\tau)) + 180°$$

   - Wenn $\tau < -90°$ ist

     $$\sigma = \arctan(\sin(\varphi)\tan(\tau)) - 180°$$

2. Nun kann gestützt auf Gleichung 2.16 der zum Stundenwinkel τ der Sonne gehörigen Winkel ρ der Stundenlinie auf der *Vertikaluhr* berechnet werden. Auch hier ist Vorsicht geboten, weil die Tangensfunktion nicht eindeutig umkehrbar ist. Das Vorzeichen von ρ muss mit jenem von σ übereinstimmen. Wir berechnen nun zuerst

   $$\rho_0 = \arctan\left(\frac{\sin(\sigma)}{\tan(\varphi)\cos(\sigma - \alpha)}\right)$$

   - Wenn das Vorzeichen von ρ_0 mit jenem von σ übereinstimmt, so ist

     $$\rho = \rho_0$$

   - Wenn das Vorzeichen von ρ_0 positiv, jenes von σ aber negativ ist, so ist

     $$\rho = \rho_0 - 180°$$

- Wenn das Vorzeichen von ρ_0 negativ, jenes von σ aber positiv ist, so ist

$$\rho = \rho_0 + 180°$$

Zum Schluss sei noch auf eine Verwandtschaft zwischen einer horizontalen Sonnenuhr und einer vertikalen, genau nach Süden ausgerichteten Sonnenuhr hingewiesen. Wenn also $\alpha = 0$ ist, liefert die Gleichung 2.16

$$\tan(\rho) = \frac{\sin(\sigma)}{\tan(\varphi)\cos(\sigma)} = \frac{\tan(\sigma)}{\tan(\varphi)}$$

Ferner gilt gemäss Gleichung 2.4

$$\tan(\sigma) = \sin(\varphi)\tan(\tau) \tag{2.18}$$

Damit wird

$$\tan(\rho) = \frac{\sin(\varphi)\tan(\tau)}{\tan(\varphi)} = \cos(\varphi)\tan(\tau)$$

Der Vergleich mit Gleichung 2.4 für den Studenlinienwinkel bei der Horizontaluhr zeigt, dass sich di beiden Formeln dadurch unterscheiden, dass bei der Horizontaluhr der Tangens des Stundenwilnkels mit dem Sinus der geographischen Breite, bei vertikalen Süduhr jedoch mit dem Cosinus der Breite multipliziert werden muss. Nun gilt zwischen den beiden trigonometrischen Funktionen der einfache Zusammenhang $\cos(\varphi) = \sin(90° - \varphi)$

Mit einer elementaren trigonometrischen Beziehung schiesslich

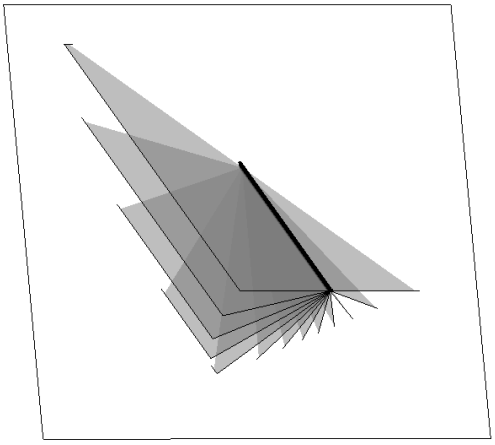
$$\tan(\rho) = \sin(90° - \varphi)\tan(\tau) \tag{2.19}$$

Das bedeutet, dass ein Zifferblatt für eine vertikale Süduhr an einem Standort mit der Breite φ identisch ist mit einem Zifferblatt für eine Horizontaluhr an einen Standort der Breite $90° - \varphi$. Umgekehrt ist ein horizontales Zifferblatt für die Breite φ gleichzeitig ein vertikales Südzifferblatt für die Breite $90° - \varphi$. Konkret bedeutet das, dass ein Zifferblatt, welches für eine vertikale, nach Süden ausgerichtete Wand in Luzern (geographische Breite 47°) berechnet wurde, auch als Zifferblatt für eine Horizontaluhr in Assisi in Italien (geographische Breite 43°) verwendet werden könnte. Ferner hat das die Kosequenz, dass in der Poebene bei einer geographische von Breite 45° eine horizontale Sonnenuhr gleichzeitig auch als vertikalen Süduhr verwendet werden kann, da ja der Polstab in beiden Fällen mit der Zifferblattebene den Winkel von 45° einschliesst.

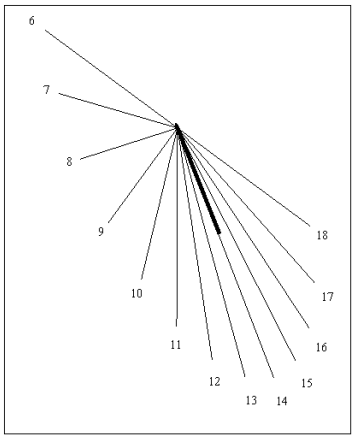
2.5. Die geneigte Sonnenuhr

In der Einführung zum Abschnitt über die abweichende, vertikale Sonnenuhr wurde darauf hingewiesen, dass das Ziffeblatt zwar nicht symmetrisch zur Mittagslinie wahrer Ortszeit ist, dass die Mittagslinie aber immer in der Fallinie vom Stabfusspunkt nach unten verläuft. Das ändert sich erst, wenn das Zifferblatt nicht mehr vertikal montiert ist, also z.B. an einer leicht geneigten Wand oder an einer Böschung angebracht ist. In der folgenden Abbildung wird das Schnittlinienbild der stündlichen Schattenebenen des Polstabe mit einer Wand gezeigt, welche um 30° aus der Südrichtung nach Westen abweicht und zusätzlich um 15° zur Vertikalen geneigt ist.

Abbildung 2.17. Zifferblatt an einer abweichenden und geneigten Wand



Schattenbüschel des Polstabes



Das zugehörige Schnittlinienbild liefert das entsprechende Zifferblatt.

Geneigte Sonnenuhren sind eher seltene Spezialfälle, welhalb wir ihre Konstruktion und Berechnung gerne den Spezialisten überlassen wollen. Die *empirische Methode* Methode hingegen könnten wir auch in einem solchen Fall anwenden - die einzige Bedingung ist, dass der Polstab korrekt montiert wird, das heisst

1. Er muss in der örtlichen Meridianebene liegen, und

2. Er muss mit der *horizontalen* Ebene den Winkel φ (= geographische Breite des Standortes) einschliessen.

Wie das im konkreten Fall zu bewerkstelligen ist, überlassen wir dem handwerklichen Geschick des kundigen Gnomonen, der uns bis hierher beharrlich gefolgt ist.

Kapitel 3. Sonnenuhren mit punktförmigem Zeiger

Wie wir wissen, ist der Stand der Sonne zu einem bestimmten Zeitunkt nicht nur von der Tages-, sondern auch von der Jahreszeit abhängig. Die jahreszeitliche Veränderung der Sonnenbahn wurde im Abschnitt Abschnitt 1.2.3 erläutert und in Abbildung 1.13 schematisch dargestellt. Die in Abschnitt 1.2.4 erklärte Deklination δ ist ein Winkel, der die Lage der Sonnebahn an einem bestimmten Datum des Jahres beschreibt. Man könnte nun den Deklinationswinkel messen um aus ihm umgekehrt auf das Datum zurückzuschliessen (allerdings nicht eindeutig, da es zwei verschiedene Tage im Jahr mit derselben Sonnendeklination gibt). Die Deklination kann man aber nicht aus der Richtung des Schattens eines Polstabes ableiten, denn es ist ja geradezu das Wesen des Polstabes, dass die Richtung seines Schattens unabhängig von der Jahreszeit nur vom Stundenwinkel der Sonne abhängig ist.

Eine zweite Herausforderung brachte die Einführung der mittleren Zeit, welche sich aus der wahren Ortszeit durch Subtraktion der Zeitgleichung berechnen lässt. Nun sind aber die Werte der Zeitgleichung ebenfalls von der Jahreszeit abhängig, welche wie gezeigt, nicht aus den Schattenrichtung allein gewonnen werden kann.

Für beide genannten Zwecke brauchen wir einen punktförmigen Anzeiger. Dieser kann die Spitze eines Stabes (sei es die Spitze eines Polstabes oder eines beliebigen Stabes) oder eine auf einen Stab aufgesetzt kleine Kugel sein. Beliebt sind auch Lichtzeiger, die aus einer grösseren Scheibe mit einem Loch bestehen. Die durch das Loch fallenden Lichtstrahlen erzeugen dann einen Lichtpunkt in einem Schattenfeld, dessen Position auf dem Zifferblatt recht präzis abgelesen werden kann (siehe folgendes Bild). Wir werden alle diese Arten unter dem Begriff *Punktzeiger* zusammenfassen und das erzeugte Bild auf dem Zifferblatt einfachheitshalber in beiden Fällen mit *Punktschatten* oder Zeigerschatten bezeichnen, auch wenn es in Wirklichkeit der von einer Lochblende erzeugte Lichtfleck ist.

Abbildung 3.1. Zeiger als Lochblende in Sonnenform

Ausschnitt aus der Wandsonnenuhr am Altersheim Erlen in Engelberg. Berechnung P. Bonaventura Thürlemann, Kloster Engelberg, künstlerische Gestaltung José de Nève, Stans

Die Position in einer Ebene (nämlich auf der ebenen Wand) wird meistens durch zwei Messgrössen, die x- und die y-Koordinate, beschrieben. Bei einem rechteckigen Zifferblatt könnten wir als x-Koordinate die Distanz vom linken, und als y-Koordinate die Distanz vom unteren Zifferblattrand verwenden.

Nun wäre es natürlich schön, wenn etwa die x-Koordinate ein Mass für die Tageszeit und die y-Koordinate ein Mass für das Datum wäre. Leider ist der Zusammenhang komplexer: Den wollen wir nun untersuchen.

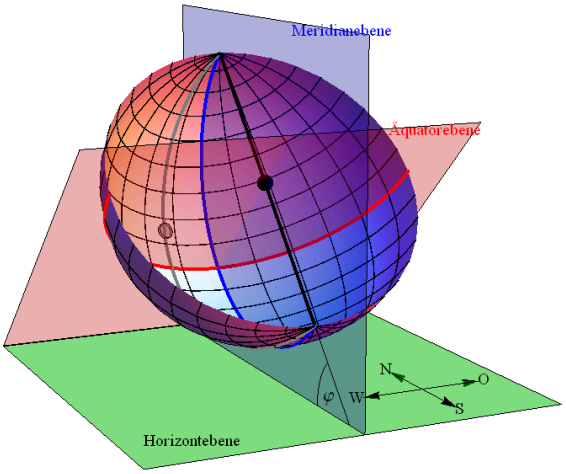
3.1. Die Anzeige der Jahreszeit

3.1.1. Die äquatoriale Skaphensonnenuhr

Zum Verständnis konstruieren wir in Gedanken eine Messinstrument, das gleichzeitig den Stundenwinkel (als Mass für die Tageszeit) und die Deklination (als Mass für die Jahreszeit)

der Sonne messen kann. Dabei lehnen wir uns an die schon in der Antike verwendete Skaphe an.

Abbildung 3.2. Äquatorialskaphe



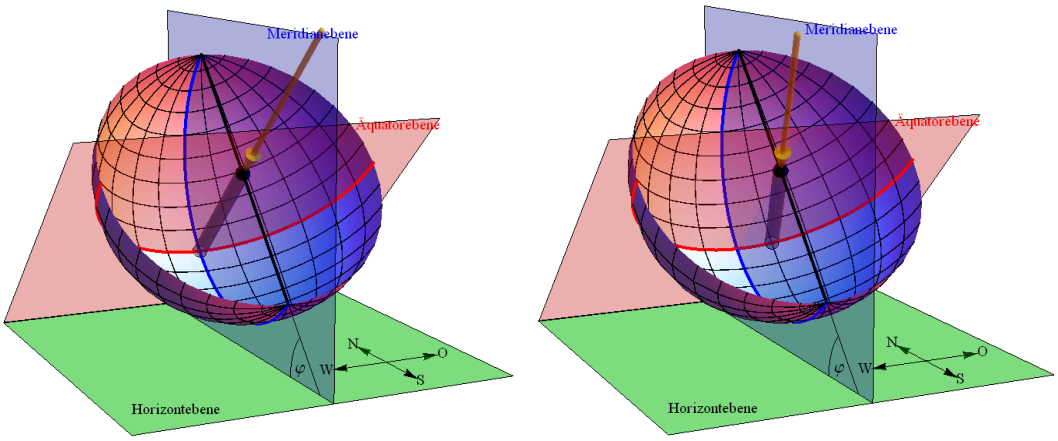
Instrument zur Messung des Stundenwinkels und der Deklination

Unser Messinstrument besteht aus einer Schale in Form einer halben Hohlkugel mit einem Stab, welcher einen Durchmesser des Öffnungskreises der Halbkugel bildet und welcher in seiner Mitte eine kleine Kugel trägt. Dies Kugel marikiert das Zentrum der Schale. Die Schale wird nun mit der Öffnung nach Süden so aufgestellet, dass der Stab einen Polstab bildet (siehe Bild oben).

Die Meridianebene, welche den Polstab enthält, halbiert die Schale entlang einem vertikalen Grosskreis, den wir den *Meridian des Instrumentes* nennen (blaue Linie). Die lokale Äquatorebene, welche den Punktzeiger enthält, halbiert die Schale ebenfalls in einem Grosskreis. Letzteren nenne wir den *Äquator des Instrumentes* (rote Linie). Die Auflagepunkte des Polstabes auf der Schattenschale nennen wir die *Pole* des Instumentes und das ganze Instrument schliesslich eine *Äquatorialskaphe*.

Wie funktioniert nun die Äquatorialskaphe? Die kleine Kugel im Zentrum der Halbkugelschale dient als Punktzeiger. Die Sonnenstrahlen (in den folgenden Bildern durch einen gelben Pfeil dargestellt), welche auf den kugelförmigen Punktzeiger fallen, erzeugen einen Schattenzylinder (graue Röhre). Dort, wo der Schattenzylinder auf die Schattenschale trifft, entsteht der kreisrunde Schatten der Zeigerkugel.

Abbildung 3.3. Schatten des Punktzeigers am 20. März

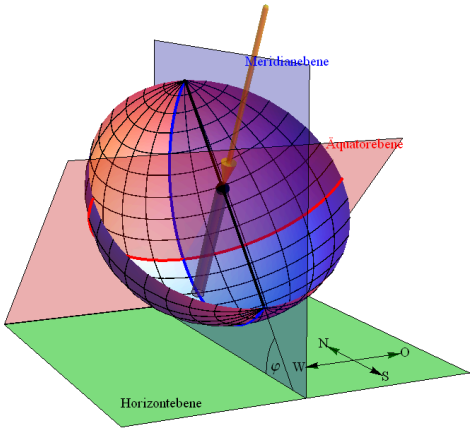


Situation am wahren Mittag Situation um 13.00 Uhr WOZ

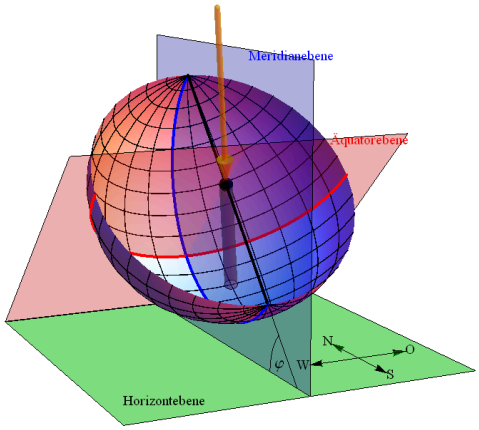
Betrachten wir unser Instrument zuerst anlässlich einer Tagundnachtgleiche (am 20. März oder am 23. September) am wahren Mittag (Bild oben links). Die Sonnen steht an diesem Tag scheinbar in der Äquatorebene und zum Zeitpunkt des wahren Mittags in der Meridianebene. Der Schatten der Kugel befindet sich somit im Schnittpunkt des Äquators und des Meridians unseres Instrumentes. Eine Stunde später (Bild oben rechts) befindet sich die Sonne immer noch in der Äquatorebene, ihr Stundenwinkel ist jedoch nun um $15°$ gewachsen. Der Schatten liegt also noch immer auf dem Äquator, ist jedoch vom Skaphenzentrum aus gesehen um $15°$ weitergewandert.

Nun betrachten wir die Szene etwa zwei Monate nach der Frühlingstagundnachtgleiche. Nach Tabelle 1 beträgt die Deklination der Sonne nun etwa $20°$, das heisst, dass die Sonne jetzt die Äquatorebene von oben bescheint und dass die Sonnenstrahen, welche auf die Zeigerkugel fallen, mit der Äquatorebene den ganzen Tag über einen Winkel $20°$ bilden, also auf dem Mantel eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel 70°, dessen Achse der Polstab ist, liegen. Der von der kleinen Kugel erzeugte Schattenstrahl liegt daher auf einen symmetrischen Kegel unterhalb der Äquatorebene. Die Schnittkurve dieses Schattenkegels mit der Skaphenschale ist ein zum Schalenäquator paralleler Kreis, dessen Zentrum auf der Polachse liegt. Im linken Bild der folgenden Abbildung ist die Situation am wahren Mittag dargestellt. Eine Stunde später hat sich die Sonne scheinbar um $15°$ um die Polachse nach Westen gedreht, weshalb der Schatten der Zeigerkugel um $15°$ nach Osten gewandert ist, wobei der Drehwinkel in der den Schatten enthaltenden, zur Äquatorebene parallelen Ebene gemessen wird.

Abbildung 3.4. Schatten des Punktzeigers am 21. April



Situation am wahren Mittag

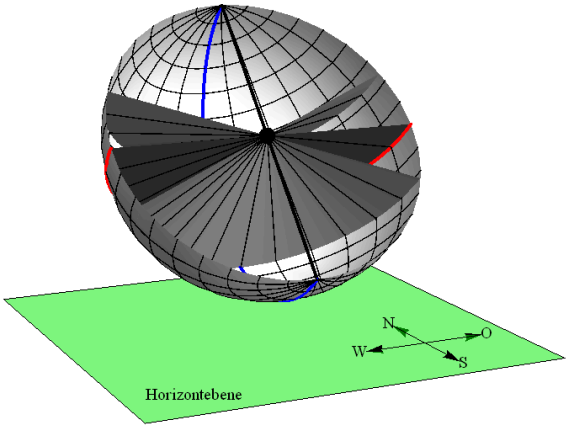


Situation um 13.00 Uhr WOZ

Allgemein lässt sich feststellen:

1. An jedem Tag des Jahres bildet die Achse des Schattenzylinders mit der Äquatorebene einen (nahezu) konstanten Winkel δ, welcher der Deklination der Sonne an diesem Tag entspricht. Der Winkel des Schattenzylinderachse mit der Polachse beträgt daher konstant $90° - \delta$. Die Achse des Schattensylinders wandert also im Verlauf des Tages auf dem Mantel eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel $90° - \delta$, dessen Achse die Polachse ist und dessen Spitzte das Zentrum der Zeigerkugel bildet. Im Spezialfall, wenn die Sonnendeklination 0° beträgt (also an den beiden Tagundnachtgleichen), steht die Sonne in der Äquatorebene und der Schattenkegel degeneriert zu einer Ebene (der Äquatorebene), welche die Schattenschale im Schalenäquator schneidet.

Abbildung 3.5. Der Schatten des Punktzeigers im Tagesverlauf



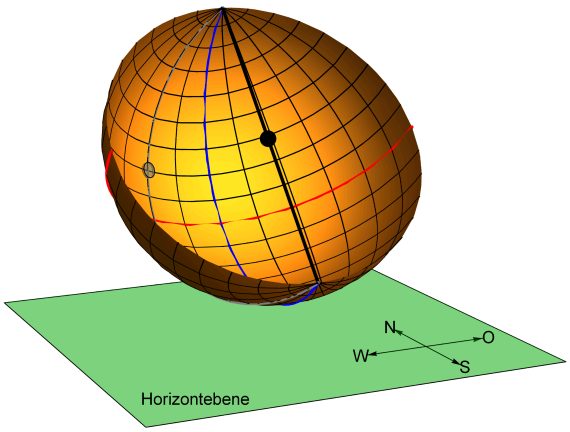
Die Schattenkegel der Zeigerkugel am Tag der Sommersonnenwende (unterer Kegel) und am Tag der Wintersonnenwende (oberer Kegel) gezeichnet. An den beiden Tagundnachtgleichen degeneriert der Kegel zur Äquatorebene (mitte).

Der Schattenkegel schneidet die Schattenschale in einem zum Skaphenäquator parallenen Kreis, was heisst, dass der Schatten der Zeigerkugel im Verlauf des Tages auf einem solchen Kreis über die Skaphenschale wandert.

2. Die Ebene, welche den Polstab und seinen Schatten enthält, bildet mit der Meridianebene einen Winkel τ, welcher dem Stundenwinkel der Sonne zur entsprechenden Tageszeit (wahren Ortszeit) entspricht. Diese Ebene schneidet die Skaphenschale in einem Grosskreis, welcher die beiden Pole enthält.

Die Linien konstanten Stundenwinkels und die Linien konstanter Deklination bilden eine Skala, welche dem Netz der Längen- und Breitenkreise, die uns von den Erdgloben her bekannt sind, ähnelt.

Abbildung 3.6. Die Skala derÄquatorialskaphe

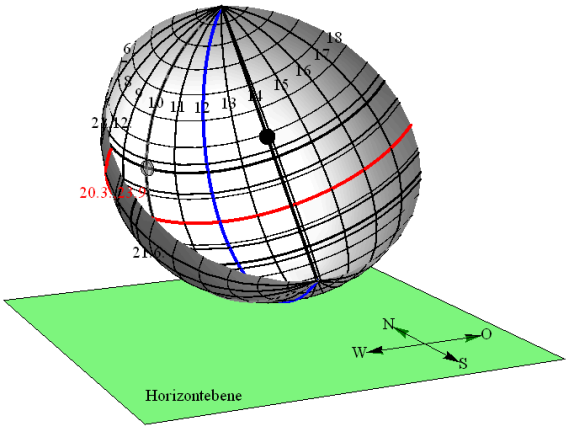


Die vertikalen Grosskreise, welche die beiden Pole enthalten, bilden die Skala für den Stundenwinkel (Abstand 15°), die zu diesen senkrecht stehenden, äquatorparallelen Kreise die Skala für die Deklination (Abstand 10°).

Im obigen Bild kann man somit ablesen, dass die Sonne aktuell an einer Position mit Stundenwinkel $-30°$ und die Deklination $-20°$ steht. Das Bild stellt somit die Situation um den 21. Januar oder um den 23. November herum (Deklination $-20°$, siehe Tabelle 1) am Vormittag um 10.00 Uhr wahrer Ortszeit (Stundenwinkel $-30°$) dar.

Weil die Sonnendeklination immer zwischen $-23.5°$ und $+23.5°$ liegt, muss man für Sonnenuhranwendungen die Deklinationsskala natürlich nur für diesen Bereich auslegen, und auch die Schattenschale könnte auf den entsprechenden Bereich beschnitten werden. Zudem ist es sinnreich, die Linien für die Stundenwinkel, statt in Graden, direkt mit der wahren Ortszeit und die Linien für die Deklination mit dem Datum anzuschreiben. Im folgenden Bild sind die Deklinationslinien im Monatsabstand eingetragen, aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die mittlere (für die Tagundnachtgleichen) sowie die oberste und die unterste (für die beiden Sonnwenden) beschriftet.

Abbildung 3.7. Äquatoriale Skaphensonnenuhr



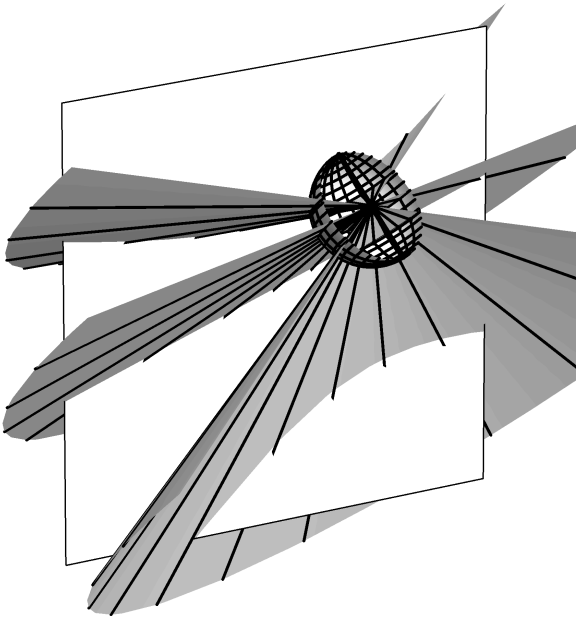
Natürlich kann man eine solche äquatoriale Skaphensonnenuhr tatsächlich bauen - ihre herausragende Bedeutung hat sie jedoch für das Verständnis der Theorie von beliebigen Sonnenuhren mit Punktzeigern.

3.1.2. Die ebene Sonnenuhr mit Deklinationslinien

Öffentliche Sonnenuhren sind mit Abstand am häufigsten an einer meist vertikalen Wand angebracht und ihr Zifferblatt ist eben.

Wenn wir die Skala für eine ebene Sonnenuhr mit Punktzeiger konstruieren wollen, müssen wir den Schattenzylinder des Punktzeigers über die Schattenschale der Skaphensonnenuhr hinaus verlängern und mit der gewünschten Zifferblattebene schneiden.

Abbildung 3.8. Schnitt der Schattenkegel mit einer Wand



Schnittlinien der über die Skaphesonnenuhr hinaus verlängerten Schattenkegel mit einem vertikalen, leicht nach Westen abweichenden Zifferblatt.

Betachten wir zuerst die Situation an den beiden Tagundnachtgleichen. Wie wir im letzten Abschnitt über die Skaphensonnenuhr gesehen haben, bewegt sich der Schatten der Zeigerkugle an diesen beiden Tagen in einer zum Äquator parallelen Ebene, welche den Punktzeiger enthält. Die über die Skaphe hinaus verlängerte Äquatorebene schneidet eine ebene Wand in einer Geraden (im obigen Bild Schattenfächer in der Mitte). Der Punktschatten liegt also an diesen beiden Tagen auf dieser Schnittgeraden.

An Sommertagen steht die Sonne oberhalb der Äquatorebene und der Schatten wandert auf dem Mantel eines nach unten geöffneten Kegels (im Bild unterer Schattenkegel). Dieser schneidet die Wand in einem Kegelschnitt. Je nach Standort und Ausrichtung der Wand kann der Kegelschnitt der Teil einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel sein.

An Wintertagen schliesslich steht die Sonne unterhalb der Äquatorebene und der Punktzeiger erzeugt einen nach oben geöffneten Schattenkegel (im Bild oberer Schattenkegel). Entsprechend schneidet dieser die Wand im vorliegenden Fall in einem nach oben offenen Teil eines Kegelschnittes.

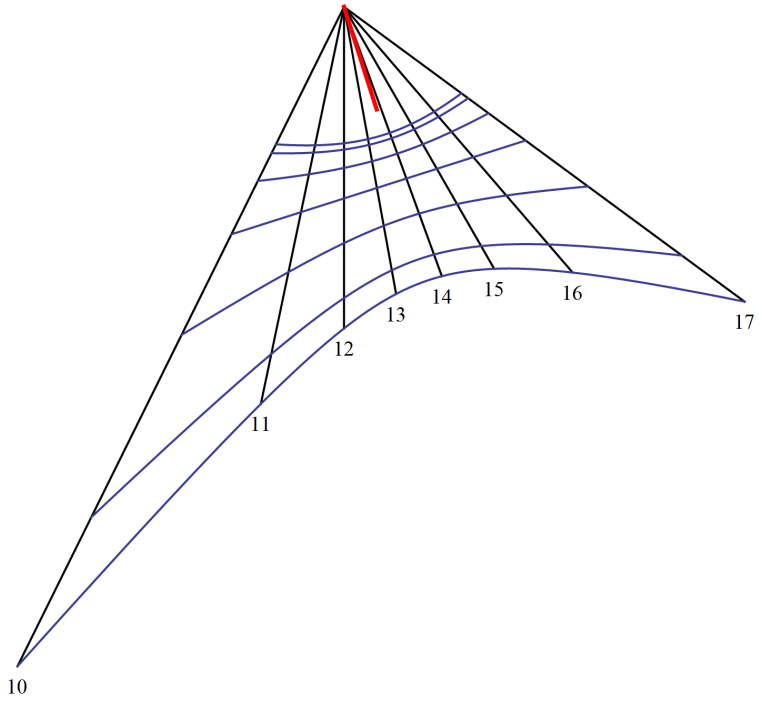
In der Regel werden bei Sonnenuhren neben den oben beschriebenen Deklinationslinien für die beiden Sonnenwenden und die Tagundnachtgleichen auch noch jene für die Deklination des Eintritts der Sonne in die sogenannten *Tierkreiszeichen* angegeben. Die folgende Tabelle entstammt dem Buch von Jörg Meyer.

Tabelle 3.1. Eintritt der Sonne in die Tierkreise

Tierkreiszeichen	**Datum des Eintritts (über den Schaltjahreszylus 2000-2003 gemittelt)**	**Sonnendeklination**
Steinbock	21. Dezember	- 23.44°
Wassermann | Schütze	20. Januar | 22. November	- 20.15°
Fische | Skorpion	19. Februar | 23. Oktober	- 11.47°
Widder | Waage	20. März | 23. September	0°
Stier | Jungfrau	20. April | 23. August	11.47°
Zwillinge | Löwe	21. Mai | 22. Juli	20.15°
Krebs	21. Juni	23.44°

Im nächsten Bild sind die Linien für Stunden 10 Uhr bis 17 Uhr wahrer Ortszeit und die Tierkreislinien für die obengenannten Daten für eine an einer vertikalen, um 20° aus der Südrichtung nach Westen abweichenden Wand angebrachte Sonnenuhr gezeichnet.

Abbildung 3.9. Vertikale, 20° nach Westen abweichende Sonnenuhr



Die Tierkreislinien gehören zu den in Tabelle 4 aufgelisteten Daten
resp. den zugehörigen Deklinationen der Sonne (von oben nach unten).

3.2. Die Anzeige der mittleren Zeit

Die im 3. Kapitel besprochene Sonnenuhr mit Polstab zeigt stets die natürliche örtliche, die so genannte wahre Ortszeit an. Wie wir gesehen haben, variiert die Tageslänge und mit ihr die Stundenlänge im Verlauf des Jahres infolge der ellipsenförmigen Umlaufbahn der Erde um die Sonnen und der Schiefe der Erdachse leicht. Nachdem es etwa ab dem 18. Jahrhundert gelungen war, recht genaue Räderuhren, die eine gleichmässige Zeit anzeigten, zu bauen, und erst recht nach Einführung der modernen Zonenzeit etwa ab dem 20. Jahrhundert, störte es, dass die alten Sonnenuhren schienbar unregelmässig liefen, zeigte doch der Schatten des Polstabes auf der Sonnenuhr um 12 Uhr MEZ in Luzern eine Zeit an, die im Verlauf des Jahres zwischen 11.15 und 11.45 Uhr liegt. Was vor allem störte war der Umstand, dass die Abweichung nicht über das ganze Jahr gleich war und somit nicht einfach durch eine Änderung des Zifferblattes behoben werden konnte.

Noch heute glauben viele Menschen, die alten Sonnenuhre liefen ungenau. Das stimmt aber keineswegs, sie zeigen bloss eine andere Zeit, eben die wahre Ortszeit, oder etwas pointierter gesagt, die natürliche, astronomische Sonnenzeit und nicht die Ende des 19. Jahrhunderts geschaffene künstlich Zeit an. Klar aber, dass die Sonnenuhrenbauer den Ehrgeizt hatten, auch Uhren zu bauen, welche diese neue Zeit anzeigten.

3.2.1. Das Problem

Bei der neuzeitlichen Zonenzeit, bei uns der Mitteleuropäischen Zeit MEZ, gibt es zwei verschieden bedingte Abweichungen zur wahren Ortszeit WOZ:

1. Es wird eine mittlere Tages- und damit auch Stundenlänge verwendet, was zur mittleren Ortszeit MOZ führt. Dieser Effekt ist vom Datum abhängig und er wird durch die *Zeitgleichung* beschrieben.

   $$\mathrm{MOZ}(n) = \mathrm{WOZ} - \mathrm{ZG}(n) \tag{3.1}$$

   $\mathrm{ZG}(n)$ ist der Wert der Zeitgleichung am n-ten Tag seit Jahresbeginn.

2. Als Zonenzeit gilt die MOZ des Referenzmeridians, bei uns jener des 15. Breitengrades (z.B. von Görlitz). Dieser Effekt ist von Standort unserer Sonnenuhr, genau gesagt von dessen geographischer Länge, abhängig. Dieser Effekt wird durch die *Zeitverschiebung* beschrieben.

   $$\mathrm{MEZ} = \mathrm{MOZ} + \mathrm{ZV}(\lambda) \tag{3.2}$$

   $\mathrm{ZV}(\lambda)$ ist der Wert der Zeitverschiebung, wenn λ die geographische Länge des Uhrenstandortes ist.

3.2.2. Die Zeigleichungsschleife

Wir betrachten zuerst den Einfluss der Zeitgleichung. Sonnenuhren, welche die mittlere Ortszeit anzeigen können, gab es schon lange vor der Einführung der Mitteleuropäischen Zeit. Grand-Jean de Fouchy hat um 1730 die *Zeitgleichungsschleife*, auch *Analemma* genannt, beschrieben. Ein Analemma ist eine Kurve, auf welcher der Schatten des Punktzeigers zu einer fest gegebenen mittleren Tageszeit (sei es mittlere Ortszeit oder mittlere Zonenzeit) im Verlauf des Jahres liegt. Ein Analemma hat die Form einer langgezogenen Ziffer 8. In In der Frühzeit wurde sie hauptsächlich bei sogenannten *Mittagszeigern*, das sind rudimentäre Sonnenuhren, welche nur den örtlichen Mittag mittlerer Ortszeit anzeigen, angebracht. Mittagszeiger brauchte man, um die seit dem 15. Jahrundert im öffentlichen Raum verbreiteten Räderuhren, welche im Prinzip eine gleichmässige Zeit anzeigten aber einen ungenauen Lauf hatten, an Sonnentagen wieder korrekt richten zu können. Ein hochinteressantes Exemplar eines Mittagszeigers mit Zeitgleichungsschleife findet man im Jesuitenkollegium in Pruntrut im Schweizer Jura.

Abbildung 3.10. Horizontale Méridienne im ancien collège des Jésuites in Pruntrut.

Der Mittagsweiser befindet sich im Inneren des Gebäudes in einem langen, schmalen Raum. Als Zeiger dient ein Loch von 8mm Durchmesser in der Südwand des Gebäudes. Durch das Loch fällt um die Mittagszeit ein dünner, Lichtstrahl.

Der Lichtstrahl erzeugt auf dem Fussboden einen Lichtfleck. Auf einer Zeigleichungsschleife kann der Zeitpunkt des Mittags in mittlerer Ortszeit abgelesen werden.

Diese sogenannte *Méridienne* wurde zwischen 1812 und 1814 vom Bischofsvikar Aloyse Billieux entworfen.[1]

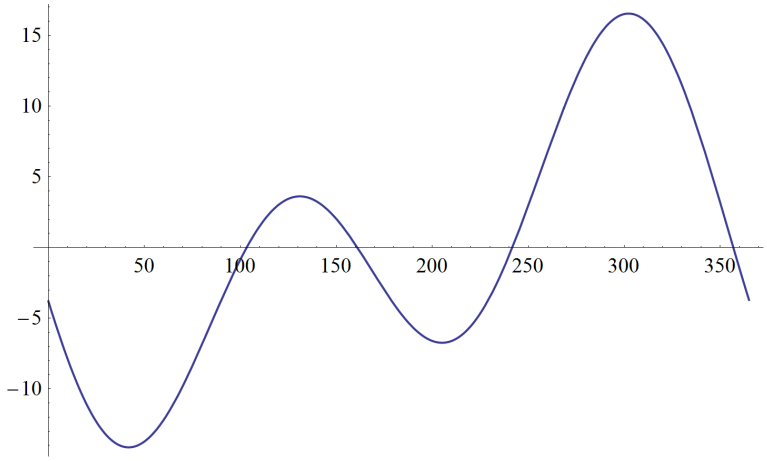
Was zeigt uns nun die Zeitgleichungsschleife? Wir erinnern uns, dass die Zeigleichung (ZG) eine Funktion ist, welche in Abhängigkeit vom Datum die Differenz zwischen der wahren Ortszeit (WOZ) und der mittleren Ortszeit (MOZ) darstellt. Daraus erhalten wir für die mittlere Ortszeit am n-ten Tag des Jahres

$$\mathrm{MOZ}(n) = \mathrm{WOZ}(n) - \mathrm{ZG}(n) \tag{3.3}$$

Den Wert der Zeigleichung Gleichung 1.30 können wir graphisch in Abhängigkeit vom Datum darstellen.

[1]Quelle: "Les Horloges de Porrentruy". Fondation Horlogère Porrentruy.

Abbildung 3.11. Die Zeitgleichung



Die Graphik stellt den Wert der Zeitgleichung in Minuten (vertikal) in Abhängigkeit von der Anzahl der seit Jahresbeginn verflossenen Tage (horizontal) dar.

Die Darstellung zeigt, dass der Wert der Zeigleichung etwa um den 100., den 160., den 240. und den 360. Tag des Jahres herum den Wert 0 hat. Laut Tabellen in der Fachliteratur[2] tritt dieses Ereignis, gemittelt über einen Schaltjahreszyklus, am 16. April, am 13. Juni, am 1. September und am 25. Dezember ein. Das bedeutet, das an diesen Tagen die mittlere und die wahren Ortszeit übereinstimmen.

Vom 16. April bis zum 13. Juni und vom 1. September bis zum 25. Dezember ist der Wert der Zeitlgeichung positiv, die mittlere Ortszeit also kleiner als die wahre Ortszeit. Eine klassische Sonnenuhr mit Polstab für die wahre Ortszeit würde also in dieser Periode gegenüber einer präzisen mechanischen Uhr, welche die mittlere Ortszeit anzeigt, vorgehen. Wenn also die Räderuhr am Mittag 12:00 Uhr zeigt, ist der Schatten des Polstabes schon über die Mittagslinie der Sonnenuhr hinus gewandert; bei einer vertikalen Süduhr würde somit der Schatten des Punktzeigers vom Beobachter aus gesehen rechts von der senkrechten Mittagslinie liegen.

In der übrigen Zeit, also vom 25. Dezember bis zum 16. April, sowie vom 13. Juni bis zum 1. September ist der Wert der Zeitgleichung negativ und die mittlere Ortszeit daher grösser als die wahre Ortszeit. Das heisst, dass die Sonnenuhr gegenüber der Räderuhr nachgeht und der Schatten des Punktzeigers um 12 Uhr MOZ links von der Mittagslinie liegt.

Nun haben wir im letzten Abschnitt gesehen, dass auch die Höhe der Sonne zu einer festen Tageszeit im Jahresverlauf variiert. Betrachten wir die Situation auf einer äquatorialen Sonnenuhr mit Punktzeiger am wahren Mittag. Am 21. Dezember steht die Sonne am tiefsten am Himmel; ihre Deklination beträgt dann etwa $-23.5°$. Der Schatten des Punktzeigers liegt auf dem Äquatorzifferblatt entsprechend auf dem höchstmöglichen Punkt der Mittagslinie. Danach steigt die Sonne täglich höher, und der Mittagsschatten des Punktzeigers steigt entsprechend ab. Am 20 März liegt die Sonne in der Äquatorebene und ihre Deklnatione ist 0°. Der Schattenfleck liegt nun auf der Tierkreislinie für den Widder. Am 21. Juni erreicht die Sonne mit einer Deklination von $23.5°$ ihren höchsten und der Schatten des Punktzeigers entsprechend den tiefsten Stand. Danach steigt die Sonne wieder ab, erreicht am 23. September die Deklination 0° um am 21. Dezember wieder an den Anfangspunkt zurückzukehren.

Die Idee von Grand-Jean de Fouchy war es nun, auf einem Zifferblatt für jeden Tag des Jahres den Schatten eines punktförmigen Schattenzeigers immer um 12 Uhr mittlere Ortszeit

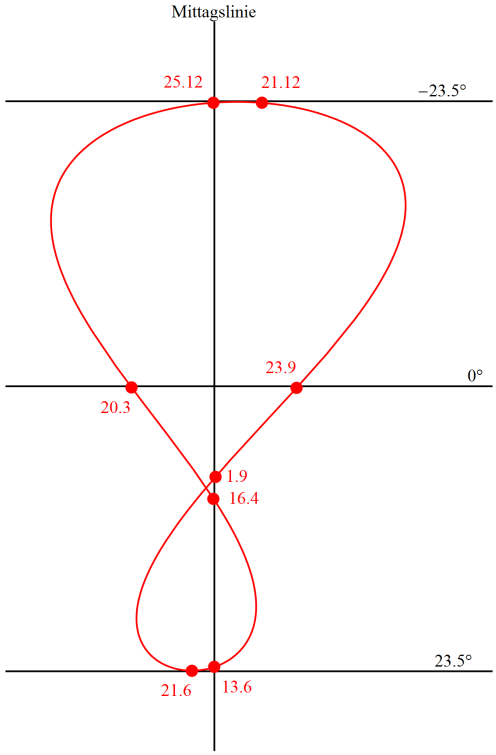
[2] z.B. Lit. [1] oder [3]

einzuzeichnen. Nach dem bisher Gesagten können wir für die jeweilige Position des Schattens des Punktzeigers auf dem Zifferblatt Folgendes festhalten:

- Am 21. Dezember liegt er an der höchstmöglichen Position ganz wenig rechts von der Mittagslinie auf der Tierkreislinie des Steinbocks. Er bleibt rechts von der Mittagslinie bis zum 25. Dezember.
- Am 25. Dezember liegt er auf der Mittagslinie, nur wenig unterhalb der Steinbocklinie. Danach wechselt er auf die linke Seite der Mittagslinie.
- Am 20. März liegt er auf der Geraden des Tierkreises des Widders, immer noch links von der Mittagslinie.
- Am 16. April liegt er genau auf der Mittagslinie unterhalb der Widderlinie. Danach wechselt der auf die rechte Seite der Mittagslinie, wo er bis zum 13. Juni bleibt.
- Am 13. Juni liegt er wieder auf der Mittagsline, nun nur wenig oberhalb der tiefsten Tierkreislinie, jener des Krebses, um danach wieder auf die linke Seite zu wechseln.
- Am 21. Juni erreicht er auf der linken Seite die Tierkreislinie des Krebses und damit seine unterste Position. Danach steigt er wieder an und bleibt mehr als zwei Monate lang auf der linken Seite der Mittagslinie.
- Am 1. September erreicht er wieder die Linie des wahren Mittags, zwischen den Tierkreislinien des Skorpions und der Waage, und wechselt auf die rechte Hälfte des Zifferblattes.
- Am 23. September fällt er auf die Gerade, welche die Tierkreislinie der Waage (und des Widders) darstellt. Danach steigt der Schattenfleck, immer rechts der Mittagslinie, täglich weiter, bis er am 21. Dezember seine Jahresschleife vollendet hat.

Das führt zu eine Figur, die der Ziffer 8 ähnelt. Auf dem Zifferblatt einer äquatorialen Ringsonnenuhr würde sie etwa wie folgt aussehen:

Abbildung 3.12. Die Zeitgleichungsschleife

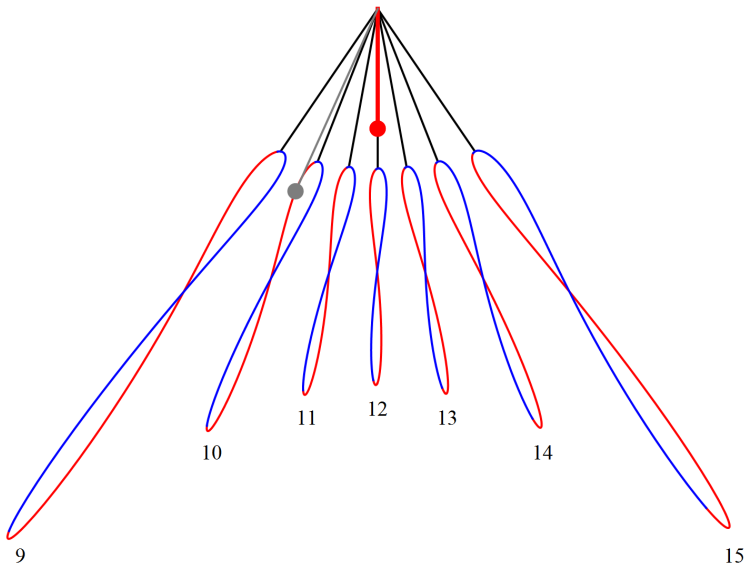


Für eine äquatoriale Ringsonnenuhr

Bei einer Sonnenuhr, welche an einer senkrechten Wand angebracht ist, ist die Zeitgleichungsschleife im Grundverlaufe gleich, jedoch infolge der schiefen Projektion auf die Wand verzerrt. Auf der nördlichen Halbkugel der Erde beginnt die Schleife in ihrem höchsten Punkt am Tag der Wintersonnenwende und durchläuft zuerst den S-förmige Teil nach links beginnend abwärts bis zum Tag der Sommersonnenwende, um danach auf dem Z-formigen Teil zum Anfangspunkt zurückzukehren.

Wir haben hier die Situation zum Zeitpunkt des mittere Mittags betrachtet. Im Prinzip gelten die Überlegungen für jedem festem Zeitpunkt nach mittlerer Ortszeit. Wenn man also eine Sonnenuhr für die mittlere Ortzeit bauen will, kann man für jede Stunde eine Zeitgleichungsschleife konstruieren.

Abbildung 3.13. Diese an einer nach Süden orientierten, vertikalen Wand angebrachte Sonnenuhr zeigt die wahre und die mittlere Ortszeit an.



Der oberste Punkt der Zeichnung stellt den Fusspunkt des Polstabes dar. Der Aufriss des Postabes ist als rote, vertikale Strecke mit einem Punktzeiger an der Spitze eingezeichnet. (Detailierte Erklärungen des Zifferblattes im folgenden Text.)

Die hier gezeigte Sonnenuhr besteht aus zwei Teilen:

- Die geraden Linien im oberen Teil, die strahlenförmig vom Fusspunkt des Polstabes ausgehen und bis zum oberen Ende der Tiekreislinien reichen, stellen die Skala für die wahre Ortszeit dar. Diese wird durch die Schattenlinie des Polstabes angezeigt.
- Die Zeitgleichungsschleifen im unteren Teil dienen zum Ablesen der mittleren Ortszeit. Diese wird durch den Schatten der Kugel angezeigt und mit Hilfe der Zeitgleichungsschleifen abgelesen. Die Zeitgleichungsschleifen sind in zwei Farben dargestellt: Der rote, S-förmige Teil gilt zwischen der Wintersonnenwende und der Sommersonnenwende, also grosso modo im 1. Halbjahr, der blaue Z-förmige Teil entsprechend für das 2. Halbjahr. Die volle Stunde nach mittlerer Ortszeit ist jeweils in jenem Zeitpunkt erreicht, zu dem der Schatten der Kugel auf der der Jahrzeit entsprechenden Hälfte der Schleife steht.

Der Schatten des Polstabes ist ein Geradenstück das vom Polfusspunkt ausgeht. Er verläuft oberen Teil leicht links von der 10-Uhr-Marke des Teils für die wahre Ortszeit, was bedeuten, dass es bis 10 Uhr *wahrer* Ortszeit noch einige Minuten dauert.

Der Schatten der Kugel im obige Bild würde sich uns etwa um den 20. Februar oder um den 20. Oktober herum so präsentieren. Nehmen wir an, es wäre Februar. In diesem Fall wäre es genau 10 Uhr *mittlerer* Ortszeit, denn der Schattenfleck steht genau auf dem roten Teil der 10-Uhr-Schleife. Wenn das Bild aber am 20. Oktober betrachten würden, dann würde es bis 10 Uhr nach mittlerer Ortszeit noch knapp eine halbe Stunde dauern, denn an diesem Tag ist es 10 Uhr MOZ erst, wenn der Kugelschatten auf dem blauen Teil der 10-Uhr-Schleife liegt.

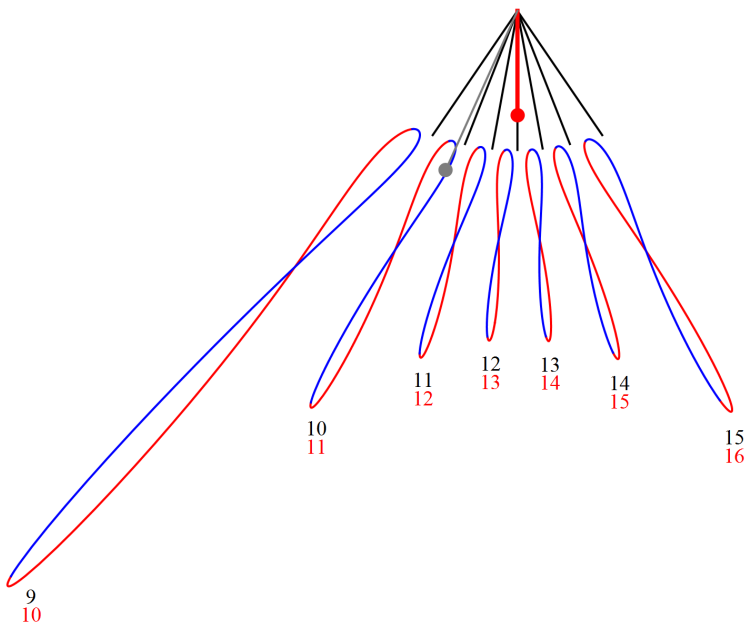
Es ist zu betonen, dass die oben gezeichnete Sonnenuhr nicht etwa die bürgerliche Zeit unserer Arbanduhr anzeigt, sondern die lokale Zeit mit den über das Jahr gemittelten Stundenlängen, eben die Wahre Ortszeit. Wenn die obige Sonnenuhr in Luzern stehen würde, würde sie gegenüber der Arbanduhr permanent um 27 Minutenvorgehen. Würde die Uhr aber in Görlitz (im äussersten Osten Deutschlands) stehen, würde ihre Anzeige die korrekte mitteleuropäische Zeit wie unsere Armbanduhr zeigen. Der Grund liegt darin, dass die mitteleuropäische Zeit als die mittlere Ortszeit des 15. Längengrades definiert ist und dass Görlitz in etwa auf eben diesem Längengrad liegt.

Um nun eine Sonnenuhr für unsere mitteleuropäische (Winter-) Zeit für den Raum Luzern zu zeichnen, müssen wir noch die Zeitverschiebung gegenüber dem Referenzmeridian, in unserem Fall dem 15. Längengrad, berücksichtigen. Luzern liegt auf der geographischen Länge 8.3°, womit die Differenz zum 15. Längengrad 6.7° beträgt. Da die Erde sich in einer Stunde um 360°/24 = 15° dreht, braucht sie für die 6.7°

$$\frac{6.7°}{15°} \cdot 60 \text{ Minuten,}$$

also rund 27 Minuten. Wenn wir also eine Sonnenuhr für die mitteleuropäische Zeit wollen, müssen wir die Zeitgleichungsschleifen für die 12.28 Uhr mittlerer Ortszeit zeichnen. Das sieht dann etwa so aus:

Abbildung 3.14. Diese an einer nach Süden orientierten, vertikalen Wand angebrachte Sonnenuhr zeigt die wahre und die mitteleuropäische Winter- und Sommerzeit in Luzern an.



Die Zeitgleichungsschleifen sind um rund 27 Minuten nach links verschoben.

Um schliesslich von der Sonnenuhr auch die Sommerzeit anzeigen zu lassen, genügt es, eine zweite, um eine Stunde verschobene Beschriftung für die Zeitgleichungsschleifen anzbringen (im Bild rot).

Wenn wir die skizzierte Sonnenuhr wieder am 20. Februar ablesen, so zeigt sie 10.20 Uhr an (massgebend sind die roten Teilschleifen, Beschriftung für die Winterzeit). Lesen wir sie aber am 20. Oktober ab, an dem die Sonne etwa die gleiche Deklination aufweist, so zeigt sie kurz vor 11 Uhr an (auf der blauen Teilschleife, Skala für die Sommerzeit, die am letzten Oktobersonntag endet).

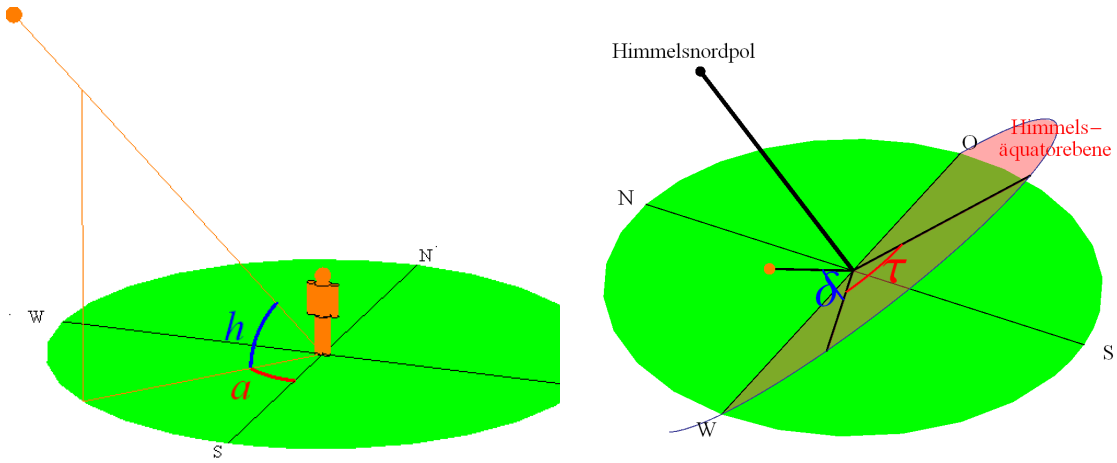
3.3. Die Mathematik der Sonnenstrahlen

Die Berechnung der Tierkreislinien und der Zeitgleichungsschleifen kann auf verschiedene Art erfolgen. Einen verbreiteten Ansatz verwendet die Sphärische Trigonometrie zusammen mit Methoden der Darstellenden Geometrie. Wir schlagen hier einen anderen Weg mit Vektorrechnung ein. Im folgenden Unterabschnitt wird eine Einführung in die Vektorrechnung geboten, wobei wir uns stark an den Bedürfnissen der Sonnenuhrenwissenschaft orientieren. Leser, welche über Grundkenntnisse in Vektorrechnung verfügen, können diese überspringen.

3.3.1. Darstellung von Richtungen mit Vektoren

Bisher haben wir räumliche Richtungen immer mit Hilfe von zwei Winkeln beschrieben, im Äquatorsystem mit dem Stundenwinkel und der Deklination, im Horizontsystem mit dem Azimut und der Höhe. Das ist aber nicht die einzige, und für die Berechnungen nicht immer die einfachste Möglichkeit, erfordert sie doch gute Kenntnisse in sphärischer Trigonometrie.

Abbildung 3.15. Beschreibung der Richtung zur Sonne mit zwei Winkeln

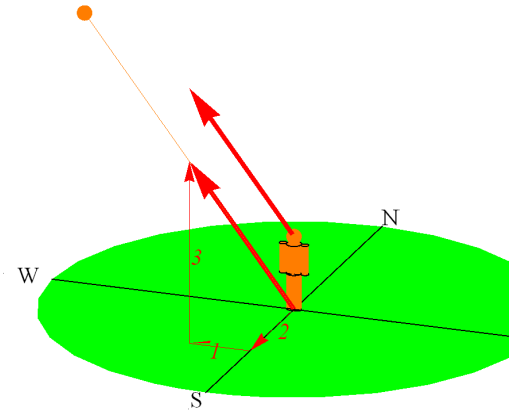


Im Horizontsystem mit Azimut a und Höhe h

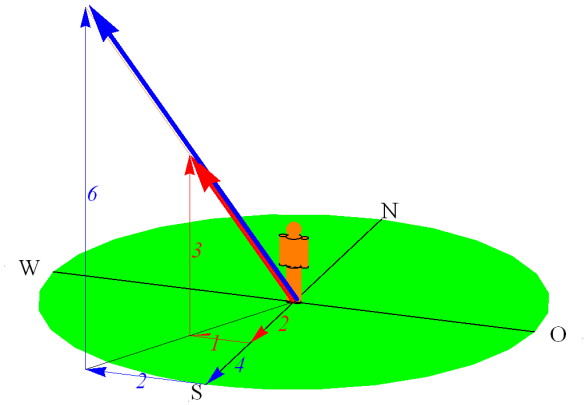
Im Äquatorsystem mit Stundenwinkel τ und Deklination δ der Sonne

Wir könnten die Sonnenrichtung aber auch anders beschreiben: Wir denken uns einen Richtungspfeil, der von einem beliebig gewählten Fixpunkt aus auf die Sonne zeigt.

Abbildung 3.16. Beschreibung der Richtung zur Sonne mit Pfeilen



Der Anfangspunkt des Richtungspfeiles ist irrelevant



Die Länge des Richtungspfeiles ist irrelevant

Die mathematische Beschreibung eines solchen Pfeiles könnte dann zum Beispiel so aussehen: "Man gelangt vom gewählten Anfangpunkt des Pfeiles zu seiner Spitze, indem man 2m nach Süden, 1m nach Westen und 3m in Richtung zum Zenit geht."

Auf zwei Punkte sei bei dieser Methode mit den Richtungspfeilen hingewiesen :

1. Den Anfangspunkt des Pfeiles, auch Basis genannt, kann irgendwo gewählt werden. Ob ich also einen Pfeil von meiner rechten Fussspitze aus um 2m nach Süden, 1m nach Westen und 3m in Richtung zum Zenit konstruiere oder ob ich einen solchen von meinem linken Auge aus um die gleichen Distanzen nach Süden, Westen respektive zum Zenit wähle: Wegen der enormen Entfernung der Sonne im Vergleich zu meiner Körpergrösse zeigen beiden Pfeile auf die Sonne (Bild oben links). Wenn ich also die Sonnenrichtung nach dieser Methode beschreiben will, muss ich den Anfangpunkt des Pfeiles gar nicht angeben.

2. Die Länge des Pfeiles ist für diesen Zweck auch nicht relevant. Wenn ich zm Beispiel vom Anfangspunkt aus 4m nach Süden, 2m nach Westen und 6m in Richtung zum Zenit gehe, also die Distanz in jede Bezugsrichtung verdopple, so erhalte ich zwar einen doppelt so langen Pfeil, der aber in dieselbe Richtung weist. (Bild oben rechts)

Die mathematisch versierten Leser erkennen sofort: Die in Punkt 1 erwähnte Eigenschaft gehört zum Wesen eines Vektors. Wir werden also im Folgenden statt "Pfeil mit beliebigem Anfangspunkt" kurz von einem *Vektor* sprechen. Jene Leser, welche der Vektorrechnung (noch) nicht mächtig sind, mögen den Begriff Vektor einfach als Abkürzung für "Pfeil gegebener Länge und Richtung mit beliebigem Anfangspunkt" verstehen. Die beiden im Bild links gezeigten Pfeile gehören daher zum selben Vektor, denn sie haben dieselbe Richtung und Länge, die beiden im Bild rechts gezeichneten Pfeile gehören jedoch nicht zum selben Vektor, denn sie haben eine verschiedene Längen.

Wir wollen noch eine Abkürzung verabreden: Statt jedesmal so lange Sätze wie "2 m nach Süden, 1 m nach Westen und 3 m in Richtung zum Zenit" schreiben zu müssen, schreiben wir im Folgenden bloss die drei Zahlen hin und schliessen sie in eckige Klammern ein, also:

$$[2, 1, 3] \tag{3.4}$$

Dabei sei festgelegt, dass (im Horizontsystem) *immer* die 1. Zahl die Distanz nach Süden, die 2. Zahl die Distanz nach Westen und die 3. Zahl die Distanz zum Zenit bedeuten soll, um vom gewählten Anfangspunkt des Pfeiles zu seiner Spitze zu gelangen. Diese drei Zahlen, welche den Vektor beschreiben, heissen seine *Komponenten* (aus dem Lateinischen, bedeutet "Bestandteile"). Die drei ausgezeichneten Referenzrichtungen "nach Süden", "nach Westen" und "zum Zenit" bilden die *Basis* des so genannten *Horizontsystems*.

Wenn eine Variable für einen ganzen Vektor steht (und nicht nur für eine einzelne Zahl), so werden wir diese Variable, der besseren Lesbarkeit zuliebe, mit einen darüber geschriebenen Pfeil kennzeichnen, also zum Beispiel

$$\vec{v} = [2,\ 1,\ 3] \tag{3.5}$$

Nun steht aber die Sonne am Vormittag an einer Position, bei der man vom Anfangspunkt des Pfeiles nach Osten, statt nach Westen, gehen muss um zur Spitze zu gelangen. Osten ist die dem Westen entgegengesetzte Himmelsrichtung. Da kommen uns die negativen Zahlen zu Hilfe. Wir verabreden weiter:

- Eine negative Südrichtung bedeutet eine Nordrichtung
- Eine negative Westrichtung eine Ostrichtung
- Eine negative Zenitrichtung eine Richtung zum Nadir (wie die der Zenitrichtung entgegengesetze Richtung mit einem Fachwort heisst).

An einem Vormittag im Sommer könnte die Sonne zum Beispiel in Richtung $[2,\ -1,\ 3]$ stehen, und kurz vor Sonnenaufgang wäre sogar die Richtung $[-1,\ -3,\ -0.1]$ möglich, das würde dann heissen: "1 m nach Norden, 3 m nach Osten und 0.1 m Richtung Nadir", was in unserer gewohnten, wenn auch weniger präzisen Ausdrucksweise etwa "Nordöstlich, knapp unter dem Horizont" heissen würde.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die beiden im rechten Bild gezeigten Pfeile nicht zum selben Vektor gehören, weil der blaue doppelt so lange ist wie der rote, aber sie haben dieselbe Richtung. Dafür gibt es eine einfache Schreibweise: Wenn ein Vektor, nennen wir ihn $\vec{w}$, solche Pfeile beschreibt, welche dieselbe Richtung, aber doppelte Länge wie die Pfeile von Vektor $\vec{v}$ haben, so schreiben wir

$$\vec{w} = 2\vec{v} \tag{3.6}$$

oder im konkreten Fall unseres Beispiels also

$$[4,\ -2,\ 6] = 2[2,\ -1,\ 3] \tag{3.7}$$

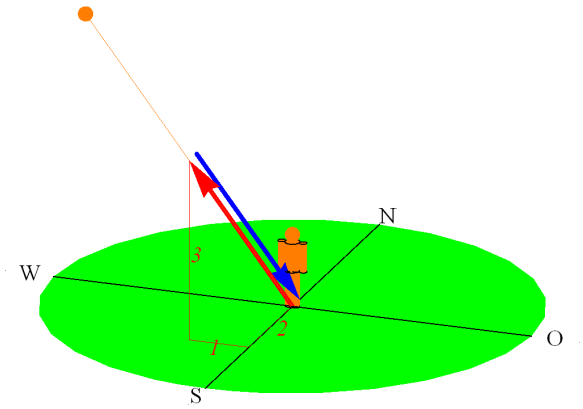
Daran erkennen wir auch gleich ein einfaches, verallgemeinerungsfähiges Prinzip: Wenn wir alle Komponenten eines Vektors mit derselben, positiven Zahl s (hier 2) mulitplizieren, resultiert ein Vektor, der dieselbe Richtung wie der ursprüngliche Vektor hat, dessen Länge jedoch das s-fache der ursprünglichen Länge ist. Das gilt sinngemäss auch, wenn s einen Wert hat, der kleiner als 1 ist. So hat zum Beispiel der Vektor

$$0.5[2,\ -1,\ 3] = [1,\ -0.5,\ 1.5] \tag{3.8}$$

dieselbe Richtung wie $[2,\ -1,\ 3]$, ist jedoch nur halb so lang. Es drängt sich die Frage auf, ob der Faktor, mit dem ein Vektor multipliziert werden kann, auch negativ sein darf. Wenn wir zum Beispiel den Faktor $s = -1$ wählen, so erhalten wir formal

$$-1[2, -1, 3] = [-2, 1, -3] \tag{3.9}$$

Während, wie gesagt, der Vektor $[2, -1, 3]$ "2 Einheiten nach Süden, 1 Einheit nach Osten und 3 Einheiten zum Zenit" bedeutet, bedeutet das Ergebnis $[-2, 1, -3]$ "2 Einheiten nach Norden, 1 Einheit nach Westen und 3 Einheiten zum Nadir". Damit ist aber ein Pfeil beschrieben, bei dem gegenüber dem ursprünglichen Vektor Anfangspunkt und Endpunkt der Pfeile vertauscht sind.



Während der rote Vektor die Richtung von uns zur Sonne anzeigt, stellt der blaue die Richtung von der Sonne zu uns, also die Richtung der Sonnenstrahlen dar. Im Zusammenhang mit Sonnenuhren ist das durchaus auch etwas Nützliches!

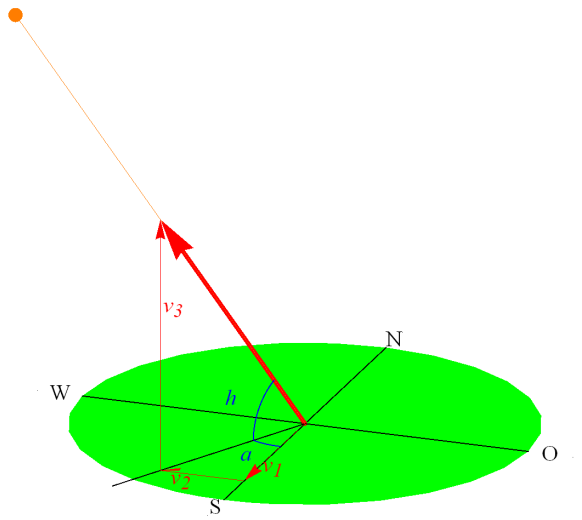
Zusammenfassend halten wir fest:

- Die Richtung zur Sonne lässt sich entweder mit zwei Richtungswinkeln, oder mit einem Richtungsvektor beschreiben.
- Während die Beschreibung mit zwei Richtungswinkeln umkehrbar eindeutig ist (verschiedene Richtungswinkel beschreiben immer auch eine verschiedene Richtungen), trifft das für die Richtungsvektoren nicht zu. Wenn irgend ein Vektor eine Richtung beschreibt, dann beschreibt auch jedes positive Vielfache davon dieselbe Richtung.
- Wenn man den Vektor mit einer negativen Zahl multipliziert, stellt das Ergebnis einen Vektor in Gegenrichtung dar.

3.3.1.1. Umrechnung zwischen Richtungswinkeln und Richtungsvektoren im Horizontsystem

Natürlich kann man zwischen den beiden Darstellungsformen von Richtungen umrechnen. Die notwendigen Formeln werden hier ohne Beweis angeführt.

Abbildung 3.17. Darstellung der Sonnenrichtung mit zwei Richtungswinkeln oder mit einem Richtungsvektor



- Aus dem Azimut a und der Höhe h kann man einem Richtungsvektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ nach folgender Vorschrift gewinnen

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos(h) \cdot \cos(a) \\ v_2 &= \cos(h) \cdot \sin(a) \\ v_3 &= \sin(h) \end{aligned} \tag{3.10}$$

  Der so berechnete Vektor hat die Länge 1.
- Umgekehrt kann man aus einem Richtungsvektor wieder das Azimut und die Höhe bestimmen. Dieses Verfahren ist aber etwas aufwändiger:

  1. Wenn der vorliegende Richtungsvektor $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ nicht die Länge 1 hat, so muss man ihn zuerst *normieren*, das heisst, einen Vektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ konstruieren, der dieselbe Richtung wie $\vec{w}$, aber die Länge 1 hat. Das erreichen man, indem man $\vec{w}$ mit dem Kehrwert seiner eigenen Länge multiplizieren. Die Länge von $\vec{w}$ berechnet sich nach der Formel

$$L = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \tag{3.11}$$

     Daraus gewinnt man den Vektor

$$\vec{v} = \frac{1}{L} \cdot \vec{w} = \left[\frac{w_1}{L}, \frac{w_2}{L}, \frac{w_3}{L}\right] \tag{3.12}$$

     welcher die gewünschte Eigenschaft hat.

  2. Aus $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ lässt sich nun die *Höhe* einfach gewinnen

$$h = \arcsin(v_3) \tag{3.13}$$

     Mit dem *Azimut* ist es komplizierter. Wir betrachten zuerst einen Spezialfall:

a. Wenn $v_1 = 0$ ist, die Südkomponente des Richtungsvektors also verschwindet, dann weist der Vektor entweder genau nach Westen oder genau nach Osten. Welcher der beiden Fälle vorliegt, erkennt man an der 2. Komponente, der Westkomponente.

   - Wenn $v_2 > 0$, dann weist der Richtungsvektor nach Westen, sein Azimut beträgt also $90°$
   - Wenn $v_2 < 0$, dann weist er nach Osten, sein Azimut beträgt also $-90°$
   - Sollte auch $v_2 = 0$ sein, dann gibt es gar kein Azimut, denn dann weist der Richtungsvektor zum Zenit (wenn $v_3 > 0$ ist), oder zum Nadir (wenn $v_3 < 0$ ist), oder er ist der Nullvektor (alle drei Komponenten verschwinden). Allen diesen drei Spezialfällen kann man vernünftigerweise kein Azimut zuordnen.

b. Wenn $v_1 \neq 0$ ist, so so berechnen wir zuerst die Hilfsgrösse

$$\tilde{a} = \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{3.14}$$

Dieser Wert liegt nach Definition der Arcustangensfunktion zwischen $-90°$ und $90°$, bezeichnet also eine Richtung zwischen Osten über Süden nach Westen. Nun sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

   - Wenn $v_1 > 0$, die Südkomponente also positiv ist, dann bezeichnet der Richtungsvektor tatsächlich eine Richtung zwischen Osten über Süden nach Westen, und unsere Hilfsgrösse stellt den korrekten Wert dar, also

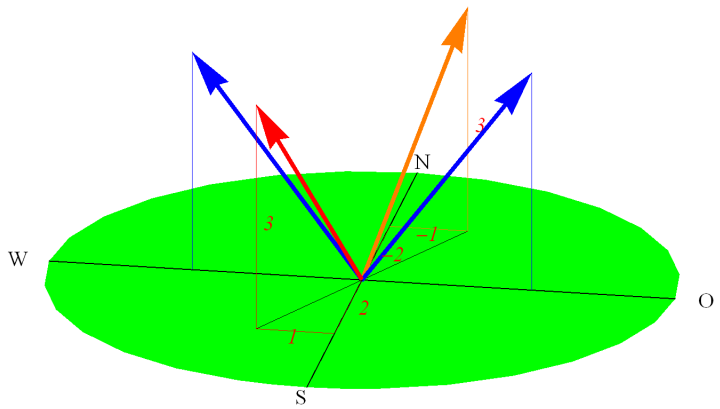
$$a = \tilde{a} \tag{3.15}$$

   - Wenn aber $v_1 < 0$, die Südkomponente also negativ ist, dann weist der Richtungsvektor in den nördlichen Halbraum. In diesem Fall unterscheidet sich $\tilde{a}$ um $180°$

vom korrekten Azimut. Wenn also $\tilde{a}$ negativ ist, so addieren wir $180°$ und wenn $\tilde{a}$ positiv ist, so subtrahieren wir $180°$.

$$a = \tilde{a} \pm 180° \tag{3.16}$$

Abbildung 3.18. Bestimmung des Azimutes aus einem Richtungvektor



Beim roten und beim orangen Pfeil resultiert derselbe Winkel $\tilde{a}$. Wenn die erste, die Südkomponnente, verschwindet wie bei den beiden blauen Pfeilen, so so zeigt der Pfeil entweder ganau nach Westen oder genau nach Osten.

Beispiele

1. Nehmen wir an, die Sonne hätte ein Azimut von $a = 30°$ und eine Höhe von $h = 50°$. Es soll ein zugehöriger Richtungsvektor bestimmt werden.

   Für die Formel Gleichung 3.10 bestimmen wir zuerst die Werte der trigonometrischen Funktionen:

   $\sin(a) = 0.5$, $\cos(a) = 0.86603$, $\sin(h) = 0.76604$ und $\cos(h) = 0.64279$.

   Daraus

$$\begin{aligned} v_1 &= 0.64279 \cdot 0.86603 = 0.55667 \\ v_2 &= 0.64279 \cdot 0.5 = 0.0.32139 \\ v_3 &= 0.76604 \end{aligned} \tag{3.17}$$

   Ein möglicher Richtungsvektor wäre also $[0.55667, 0.0.32139, 0.76604]$.

2. Nun möchten wir zum Richtungsvektor $\vec{w} = [-1, -2, 2]$ das zugehörige Azimut und die Höhe bestimmen. Der Vektor ist offensichtlich länger als 1, denn es gibt ja einzelne Komponenten die länger sind. Wir bestimmen seine Länge.

$$L = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \tag{3.18}$$

   Nun normieren wir den Richtungsvektor

$$\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{w} = \left[\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right] \tag{3.19}$$

Gemäss Gleichung 3.13 kann aus der 3. Komponente die Höhe berechnet werden.

$$h = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 41.8° \tag{3.20}$$

Weil die 1. Komponente ungleich 0 ist, berechnen wir

$$\tilde{a} = \arctan\left(\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{-1}{3}}\right) = \arctan(2) = 63.4° \tag{3.21}$$

Nun ist die 1. Komponente von $\vec{v}$ negativ und weist somit in den nördlichen Halbraum. Deshalb muss dieser Wert noch um $180°$ korrigiert werden. Das Azimut geträgt also

$$a = \tilde{a} - 180° = -116.6° \tag{3.22}$$

3.3.2. Richtungsvektoren im Äquatorsystem

Die Aufgabe, die Richtung zur Sonne bezüglich unseres Horizontsystems an einem bestimmten Tag des Jahres und zu einer bestimmten Tageszeit zu berechnen, ist nicht ganz einfach. Hingegen haben wir gelernt, wie man die Deklination δ, der Sonne in Abhängigkeit vom Datum und ihren Stundenwinkel τ in Abhängigkeit von der Tageszeit (WOZ) berechnen können Zur Erinnerung:

- Die Deklination n Tage nach Jahresanfang berechnet man näherungsweise durch

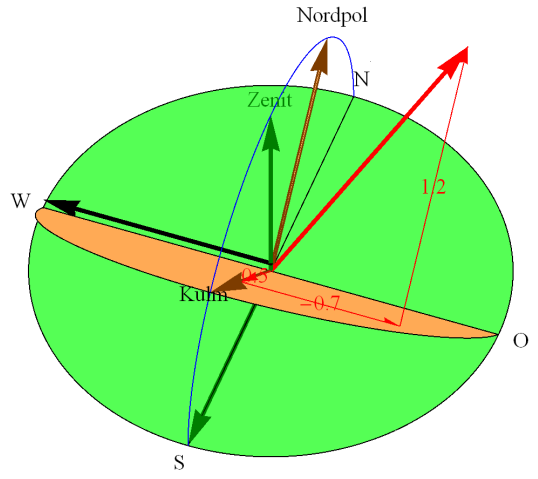
$$\begin{aligned}\delta \approx\ & 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot n - 79.64°) \\ & + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot n - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot n - 59.93°)\end{aligned} \tag{3.23}$$

- Den Stundenwinkel zur wahren Ortszeit Zeit t durch

$$\tau = (t - 12) \cdot 15° \tag{3.24}$$

Die Deklination bezeichnet den Winkel der Sonnenrichtung zur Himmelsäquatorebene und ist somit verwandt mit der Höhe im Horizontsystem, welche den Winkel zur Horzizontebene misst. Der Stundenwinkel wird auf der Äquatorebene vom höchsten Punkt im Süden aus nach Westen gemessen - er ist somit ebenso verwandt mit dem Azimut im Horizontsystem. Diese Parallelen legen nahe, im Äquatorsystem die drei Richtungen "Zum Schnittpunkt des Ortsmerdians mit der Äqutorebene", "Nach Westen" und "In Richtung zum Himmelsnordpol" auszuzeichen. Im Schnittpunkt des Ortsmerdians mit der Äqutorebene erreicht die Sonne an den beiden Tagundnachtgleichen am wahren Mittag ihren Höchststand oder Kulminationspunkt. Der Kürze zuliebe nennen wir diesen Punkt *Kulm*.

Abbildung 3.19. Horizont- und Äquatorsystem



Beim Äquatorsystem übernimmt die lokale Himmelsäquatorebene (orange dargestellt) die Rolle, welche beim Horizontsystem die Horizontebene (grün dargestellt) spielt. Als Referenzrichtungen für die Richtungsvektoren dienen im Äquatorsystem die Richtung zum Schnittpunkt des Ortsmerdians mit der Äquatorebene (Kulm), die Richtung der Schnittgeraden zwischen der Horizont- und der Äquatorebene nach Westen und die Richtung zum Himmelsnordpol.

Man kann nun den Richtungsvektor zur Sonne ebenso gut durch die Referenzrichtungen des Äquatorsystems darstellen, indem man etwa sagt "0.5 Einheiten in Richtung zum Kulm, -0.7 Einheiten in Richtung Westen (was 0.7 Einheiten Richtung Osten bedeutet) und 1.2 Einheit in Richtung Nordpol".

Auch diese Richtungsangaben möchten wir auf eine Kurzformel reduzieren. Wenn wir nun aber einfach $[0.5,\ -0.7,\ 1.2]$ schreiben, so ist nicht ohne Weiteres klar, ob sich die Zahlen auf die Referenzrichtungen des Horizontsystemes oder jene des Äquatorsystemes beziehen, ob das also als "0.5 Einheiten nach Süden, 0.7 Einheit in Gegenrichtung von Westen und 1.2 Einheiten in Richtung zum Zenit" oder eben "0.5 Einheiten in Richtung Kulm, 0.7 Einheit in Gegenrichtung von Westen und 1.2 Einheiten in Richtung zum Nordpol" bedeuten soll, es sei denn, wir erwähnen das ausdrücklich. Wir werden auch dafür eine abgekürzte Schreibweise verwenden und

- $[0.5,\ -0.7,\ 1]_{\text{Horizont}}$ schreiben, wenn wir die erste Version meinen, repektive
- $[0.5,\ -0.7,\ 1]_{\text{Äquator}}$, wenn wir die zweite Version meinen.

Wenn - vor alle bei längeren Rechnungen - aus dem Zusammenhang klar ist, auf welches System sich die Komponenten beziehen, werden wir aber darauf verzichten, das Subscript jedesmal zu wiederholen.

3.3.2.1. Analogie zwischen dem Horizont- und dem Äquatorsystem

Das Äquatorsystem kann man sich aus dem Horizontsystem entstanden denken, indem letzteres an der Ost-West-Achse um den Winkel $90° - \varphi$, von Westen aus gesehen im Uhrzeigersinn gedreht wurde. Dabei ist φ die geographische Breite des Standortes und $90° - \varphi$

der Winkel, unter dem die Äquatorebene die Horizontebene schneidet. Zwischen den beiden Systemen gibt es daher eine strenge Eins zu Eins - Korrespondenz, welche in der folgenden Tabelle zusammengefasst ist.

Tabelle 3.2. Korrespondenzen zwischen dem Horizont und dem Äquatorsystem

Horizontsystem	**Äquatorsystem**
Horizontebene	Äquatorebene
Süden	Kulm
Westen	Westen
Zenit	Nordpol
Azimut a	Stundenwinkel τ
Höhe h	Deklination δ

Auf Grund dieser Beziehungen können wir nun die im letzten Abschnitt vorgestellten Formeln zur Umrechung von Stundenwinkel und Deklination in einen Richtungswinkel im Äquatorsystem einfach anpassen, indem wir die entsprechenden Bezeichnungen ersetzen.

3.3.2.2. Umrechnung zwischen Richtungswinkeln und Richtungsvektoren im Äquatorsystem

- Aus dem Stundenwinkel τ und der Deklination δ kann man einem Richtungsvektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]_{\text{Äquator}}$ gewinnen. Dabei ist

$$\begin{aligned} v_1 &= \cos(\delta) \cdot \cos(\tau) \\ v_2 &= \cos(\delta) \cdot \sin(\tau) \\ v_3 &= \sin(\delta) \end{aligned} \tag{3.25}$$

  Dieser hat die Länge 1.
- Umgekehrt kann man aus einem Richtungsvektor wieder Stundenwinkel und Deklination berechnen:

  1. Wenn der vorliegende Richtungsvektor $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]_{\text{Äquator}}$ nicht die Länge 1 hat, so muss man aus ihm zuerst *normieren*, das heisst, einen solchen Vektor $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]_{\text{Äquator}}$ konstruieren, der dieselbe Richtung wie $\vec{w}$, aber die Länge 1 hat. Das erreichen wir, indem wir $\vec{w}$ mit dem Kehrwert seiner eigenen Länge multiplizieren. Die Länge von $\vec{w}$ berechnet sich nach der Formel

$$L = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \tag{3.26}$$

     Daraus gewinnen wir den Vektor

$$\vec{v} = \frac{1}{L} \cdot \vec{w} \tag{3.27}$$

     welcher die gewünschte Eigenschaft hat.

  2. Aus $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]_{\text{Äquator}}$ lässt sich nun die *Deklination* einfach gewinnen

$$\delta = \arcsin(v_3) \tag{3.28}$$

Mit dem *Stundenwinkel* ist es komplizierter. Wir betrachten zuerst einen Spezialfall:

a. Wenn $v_1 = 0$ und ist, die Kulmkomponente des Richtungsvektors also verschwindet, dann weist der Vektor entweder genau nach Westen oder genau nach Osten. Welcher der beiden Fälle vorliegt, erkennt man an der 2. Komponente, der Westkomponente.

   - Wenn $v_2 > 0$, dann weist der Richtungsvektor nach Westen,
   - Wenn $v_2 < 0$, dann weist er nach Osten,
   - Wenn auch $v_2 = 0$ sein sollte, dann gibt es gar keinen Stundenwinkel, denn dann weist der Richtungsvektor zum Nordpol oder zum Südpol oder er ist der Nullvektor (alle drei Komponenten verschwinden). In all diesen Fällen kann man dem Richtungsvektor vernünftigerweis keinen Stundenwinkel zuordnen.

b. Wenn $v_1 \neq 0$ ist, so berechnen wir zuerst die Hilfsgrösse

$$\tilde{\tau} = \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{3.29}$$

   Dieser Wert liegt nach Definition der Arcustangensfunktion zwischen $-90°$ und $90°$. Nun sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

   - Wenn nun $v_1 > 0$, die Kulmkomponente also positiv ist, dann bezeichnt der Richtungsvektor eine Richtung zwischen Osten über Kulm nach Westen, der Stundenwinkel liegt also tatsächlich zwischen $-90°$ und $90°$ und unsere Hilfsgrösse ist der korrekte Wert, also

$$\tau = \tilde{\tau} \tag{3.30}$$

   - Wenn aber $v_1 < 0$, die Kulmkomponente also negativ ist, dann weist der Richtungsvektor in den der Kulmrichtung abgewendeten Halbraum. In diesem Fall unterscheidet sich $\tilde{\tau}$ um $180°$ vom korrekten Azimut. Wenn nun $\tilde{\tau}$ negativ ist, so addieren wir $180°$ und wenn $\tilde{\tau}$ positiv ist, so subtrahieren wir $180°$.

$$\tau = \tilde{\tau} \pm 180° \tag{3.31}$$

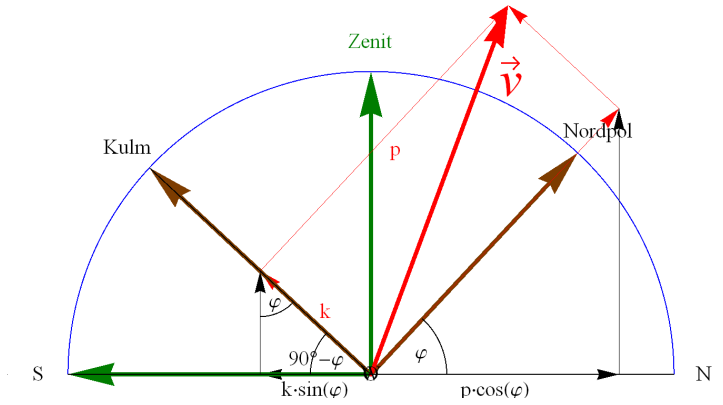
3.3.3. Richtungsvektoren im Horizontsystem

Im Äquatorsystem lässt sich mit den im letzten Abschnitt gezeigten Formeln ein Vektor in Richtung zur Sonne an einem bestimmten Tag und zu einer bestimmten Tageszeit relativ einfach berechnen. Nun sind aber die Deklination und der Stundenwinkel und auch Richtungswinkel in Komponenten des schiefen Äquatorsystems für den Menschen, der auf der Horizontebene wandelt, nicht so leicht zu deuten, weil man ja die Äquatorebene am Himmel nicht sehen kann. Nun können Richtungsvektoren relativ leicht vom Äquator- ins Horizontsystem umgerechnet werden, in welchem sind sie für uns besser fassbar sind.

Erinnern wir uns: Das Äquatorsystem kann man sich aus dem Horizontsystem entstanden denken, indem man letzteres an der Ost-West-Achse um $90° - \varphi$ dreht, wenn φ die geographische Breite unseres Standortes ist.

Zuerst stellen wir fest, dass die Westrichtung in beiden Systemen als 2. Referenzrichtung dient, weshalb die 2. Komponente bei Übergang vom Äquator- ins Horizontsystem unverändert bleibt. Um zu sehen, welche Auswirkungen der Übergang auf die beiden anderen Komponenten hat, betrachten wir die Szene der letzten Abbildung von Osten her.

Abbildung 3.20. Horizont- und Äquatorsystem von Osten her betrachtet



Die Südkomponente (1. Horizontkomponente) des Richtungsvektors $\vec{v}$ hängt von der Kulmkomponente k (1. Äquatorkomponente) und von der Nordpolkomponente p (3. Äquatorkomponente) ab.

Das Bild zeigt, dass die Südkomponente, also die 1. Horizontkomponente, nur von der Kulmkomponente k (1. Äquatorkomponente) und von der Nordpolkomponente p (3. Äquatorkomponente), nicht jedoch von der Westkomponente abhängt. Je grösser die Kulmkomponente, umso grösser die Südkomponente, je grösser die Polkomponente p, umso kleiner die Südkomponente. Jene Leserinnen und Leser, welche die trigonometrischen Funktionen verstehen, können auch die entsprechenden Beträge berechnen, welche in der Graphik eingetragen sind. Aus diesen Überlegungen können wir die Südkomponente s aus der Kulmkomponente k und der Polkomponente p berechnen

$$s = k \cdot \sin(\varphi) - p \cdot \cos(\varphi) \tag{3.32}$$

Eine analoge Betrachtung, welche wir hier nicht nachvolziehen, liefert für die Zenitkomponente (3. Horizontkomponente)

$$z = k \cdot \cos(\varphi) + p \cdot \sin(\varphi) \tag{3.33}$$

wobei φ, wie immer, die geographische Breite des Standortes ist.

Wenn umgekehrt die Horizontkoordinaten s und z der Sonne (oder eines anderen Himmelskörpers) gegeben sind, lassen sich die Äquatorkoordinaten k und p aus den beiden obigen Gleichungen, welche dann ein lineares Gleichungssystem darstellen, berechnen.

$$k = s \cdot \sin(\varphi) + z \cdot \cos(\varphi) \tag{3.34}$$

$$p = -s \cdot \cos(\varphi) + z \cdot \sin(\varphi) \tag{3.35}$$

Wir fassen zusammen, wobei wir etwas systematischere Bezeichnungen verwenden:

Umrechnung zwischen Äquator- und Horizontkomponenten

An eine Ort mit der geographischen Breite φ gelten zwischen den Komponenten eines Vektors im Äquatorsystem und jenen im Horizontsystem folgende Zusammenhänge: Sei

$$\vec{v} = [a_1, a_2, a_3]_{\text{Äquator}} = [h_1, h_2, h_3]_{\text{Horizont}} \tag{3.36}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_1 &= a_1 \cdot \sin(\varphi) - a_3 \cdot \cos(\varphi) \\ h_2 &= a_2 \\ h_3 &= a_1 \cdot \cos(\varphi) + a_3 \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{3.37}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} a_1 &= h_1 \cdot \sin(\varphi) + h_3 \cdot \cos(\varphi) \\ a_2 &= h_2 \\ a_3 &= -h_1 \cdot \cos(\varphi) + h_3 \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.3.3.1. Beispiel

Aus welcher Richtung scheint in Luzern die Sonne am 1. Mai um 9 Uhr vormittags?

Zuerst berechnen wir die Deklination der Sonne nach der Formel Gleichung 3.23.

Der 1. Mai ist der 121. Tag des Jahres. Weil wir eine Zeit am Vormttag vorgegeben haben, wählen wir .

$$\begin{aligned} \delta \approx\ & 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot 120 - 79.64°) \\ & + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot 120 - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot 120 - 59.93°) \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$= 14.9° \tag{3.40}$$

Zur Berechnung des Stundenwinkels der Sonne rechnen wir zuerst die mitteleuropäische Zeit in wahre Ortszeit um. Dabei verwenden wir die im Abschnitt über die Zeitrechnung hergeleiteten Formeln. Für alle Zeitangeben werden Stunden verwendet.

Da am 1. Mai die Sommerzeit gilt, rechnen wir zuerst auf die mitteleuropäische Normalzeit zurück.

$$\text{MEZ} = 9 - 1 = 8 \tag{3.41}$$

Aus dieser erhalten wir die wahre Ortszeit nach der Formel

$$\text{WOZ} = \text{MEZ} - \text{ZV} + \text{ZG} \tag{3.42}$$

Die Zeitverschiebung

$$\text{ZV} = 1 - \frac{\lambda}{15°} \tag{3.43}$$

beträgt für Luzern mit $\lambda \approx 8.3°$

$$\text{ZV} = 1 - \frac{8.3°}{15°} = 0.45 \tag{3.44}$$

Der Wert der Zeigleichung hängt, wie die Deklination, vom Datum ab. Gemäss Formel Gleichung 1.29 gilt für $n = 120$ (in Stunden)

$$\text{ZG} \approx -0.125 \cdot \sin(120 \cdot 0.9856° - 2.6°) + 0.165 \cdot \sin(120 \cdot 1.971° - 155.2°) = 0.0545 \tag{3.45}$$

Die wahre Ortszeit ist also

$$\mathrm{WOZ} = 8 - 0.45 + 0.05 = 7.6 \tag{3.46}$$

Aus ihr lässt sich der Stundenwinkel einfach berechnen. Wegen $\mathrm{WOZ} = 12 + \frac{\tau}{15°}$ gilt

$$\tau = (\mathrm{WOZ} - 12) \cdot 15° = (7.6 - 12) \cdot 15° = -66° \tag{3.47}$$

Aus der Deklination und dem Stundenwinkel der Sonne können wir nun mit Hilfe der Formeln Gleichung 3.25 den Richtungsvektor im Äquatorsystem bestimmen.

$$\vec{s} = [\cos(\delta)\cos(\tau), \cos(\delta)\sin(\tau), \sin(\delta)]_{\text{Äquator}} \tag{3.48}$$

$$= [0.96638 \cdot 0.40674, 0.96638 \cdot (-0.91355), 0.25713]_{\text{Äquator}} \tag{3.49}$$

$$= [0.39306, -0.88283, 0.25713]_{\text{Äquator}} \tag{3.50}$$

Nun können wir die Komponenten des Äquatorsystems gemäss den oben entwickelten Formeln Gleichung 3.37 in Komponenten des Horizontsystems umrechnen.

Für Luzern, mit der geographischen Breite $\varphi = 47°$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.39306 \cdot \sin(47°) - 0.25713 \cdot \cos(47°) = 0.11210 \\ h_2 &= -0.88283 \\ h_3 &= 0.39306 \cdot \cos(47°) + 0.25713 \cdot \sin(47°) = 0.45612 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Damit erhalten wir, auf 3 Stellen gerundet

$$\vec{s} = [0.112, -0.883, 0.456]_{\text{Horizont}} \tag{3.52}$$

Die Sonne steht also in Luzern am 1. Mai am Morgen um 9 Uhr in der Richtung "0.112 Einheiten nach Süden, 0.883 Einheiten nach Osten und 0.456 Einheiten in Richtung zum Zenit.

3.3.4. Rechnen mit Richtungsvektoren

Wir gehen in diesem ganzen Abschnitt von der Vorstellung des Horizontsystem aus. Die Überlegungen könnten aber genau so gut im Äquatorsystem oder in einem anderen, später einzuführenden System gemacht werden. Aus diesem Grund lassen wir bei den Komponentenangaben jeweils den Index "Horizont" weg, sprechen aber trotzdem von Süd-, West- und Zenitrichtung.

3.3.4.1. Addition von Richtungsvektoren

Gehen wir in Gedanken von einem gegebenen Anfangspunkt aus zuerst 3 m nach Süden, danach 2 m nach Westen und schliesslich 5 m in Richtung zum Zenit. Vom diesem Zwischenpunkt aus machen wir eine weitere kombinierte Bewegung, nämlich zuerst 2 m nach Süden, danach 4 m nach Osten und 3 m in Gegenrichtung zum Zenit, zum sogenannt Nadir. Damit sind wir am Endpunkt angekommen.

Welche Bewegung müssten wir machen, um vom Anfangspunkt ohne Umweg über den Zwischenpunkt direkt zum Endpunkt zu gelangen? Die Anwort ist wohl nicht allzu schwierig:

- In Südrichtung haben wir uns zuerst 3 m und danach nochmals 2 m bewegt, total also 5 m. Der Endpunkt liegt also 5 m südlich vom Ausgangspunkt.
- Dann haben wir uns zuerst 2 m in Westrichtung bewegt und danach 4 m in Ostrichtung. Der Endpunkt liegt also 2 m östlich vom Ausgangspunkt.
- In der Vertikalen haben wir uns zuerst 5 m nach oben und danach 3 m nach unten bewegt. Der Endpunkt liegt also 2 m höher als der Ausgangspunkt.

Dasselbe mit Richtungsvektoren ausgerückt, lautet dann so: "Wenn wir uns von einem gegebenen Anfangspunkt aus zuerst in Richtung $[3, 2, 5]$ und danach in Richtung $[2, -4, -3]$ bewegen, so kommen wir in einem Endpunkt, den wir vom Anfangspunkt aus direkt mit der Bewegung $[5, -2, 2]$ hätten erreichen können". Für das Nacheinanderausführen von solchen Bewegungen braucht man in Formeln das Pluszeichen. Wir könnten den obigen Satz also kurz so formalisieren:

$$[3, 2, 5]+[2, -4, -3]=[5, -2, 2] \tag{3.53}$$

In Verallgemeinerung des hier entwickelten Gedankenganges halten wir fest:

Definition der Addition von Richtungsvektoren

Gegeben seien zwei Richtungsvektoren mit ihren im gleichen System ausgedrückten Komponenten $\vec{v}=[v_1, v_2, v_3]$ und $\vec{w}=[w_1, w_2, w_3]$. Dann ist ihre *Summe* durch folgende Komponenten im selben System gegeben:

$$\vec{v}+\vec{w}=[v_1, v_2, v_3]+[w_1, w_2, w_3]=[v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3]$$

oder kurz gesagt:

Richtungsvektoren werden komponentenweise addiert.

3.3.4.2. Der Gegenvektor, Nullvektor und Subtraktion von Richtungsvektoren

Betrachten wir nochmals den im letzten Abschnitt verwendeten Vektor $[3, 2, 5]$. Er bedeutet "Vom Anfangspunkt aus 3 Einheiten nach Süden, 2 Einheiten nach Westen und 5 Einheiten in Richtung Zenit zum Zielpunkt". Nun fragen wir uns, wie man vom Zielpunkt aus wieder zum Anfangspunkt zurückkommt. Klar, wir müssen den ganzen Weg zurück gehen, also "5 Einheiten nach unten, 2 Einheiten nach Osten und 3 Einheiten nach Norden", oder in unserer Kurzschreibweise $[-3, -2, -5]$. Dies führt zu folgender

Definition des Gegenvektors

Gegeben sei ein Richtungsvektor mit seinen Komponenten $\vec{v}=[v_1, v_2, v_3]$. Dann ist

$$-\vec{v}=[-v_1, -v_2, -v_3] \tag{3.54}$$

sein *Gegenvektor*. Oder: Den Gegenvektor erhält man, indem man das Vorzeichen aller Komponenten wechselt.

Wenn wir zu einem Vektor seinen eigenen Gegenvektor addieren, so erhalten wir

$$\vec{v}+(-\vec{v})=[v_1, v_2, v_3]+[-v_1, -v_2, -v_3] \tag{3.55}$$

$$= [v_1 - v_1, -v_2 - v_2, v_3 - v_3] = [0, 0, 0] \tag{3.56}$$

Das würde bedeuten "0 Einheiten nach Süden, 0 einheiten nach Westen und 0 Einheiten zum Zenit", also im Klartext: "stehen an Ort". Das ist ja auch klar: wenn wir uns gleichviel nach Westen wie nach Osten, dann gleichviel nach Süden wie nach Norden und schliesslich gleichviel zum Zenit wie zum Nadir bewegen, sind wir wieder am Ausgangspunkt.

Definition des Nullvektors

Der Vektor

$$\vec{0} = [0, 0, 0] \tag{3.57}$$

heisst der *Nullvektor*.

Betrachten wir nun noch die Subtraktion von Vektoren. Was sollen wir unter dem Ausdruck $\vec{v} - \vec{w}$ verstehen? Von der "gewöhnlichen" Algebra her sind wir uns gewohnt, dass das gleichbedeutend ist mit $\vec{v} + (-\vec{w})$. Das wollen wir auch für Richtungsvektoren so vereinbaren.

Definition der Differenz von Richtungsvektoren

Gegeben seien zwei Richtungsvektoren mit ihren im gleichen System ausgedrückten Komponenten $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ und $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$. Dann ist ihre *Differenz* durch folgende Komponenten im selben System gegeben:

$$\vec{v} - \vec{w} = [v_1, v_2, v_3] - [w_1, w_2, w_3] = [v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3]$$

oder kurz gesagt:

Richtungsvektoren werden komponentenweise subtrahiert.

3.3.4.3. Multiplikation von Richtungsvektoren mit Zahlen

Bereits in der Einführung Abschnitt 3.3.1 haben wir vereinbart, dass wir unter dem Richtungsvektor $3\vec{v}$ einen solchen Richtungsvektor verstehen wollen, der dieselbe Richtung hat wie $\vec{v}$, jedoch 3 mal so lang ist. Ferner haben wir den Gegenrichtung $-\vec{v}$ von $\vec{v}$ eingeführt. Konsequenterweise werden wir unter dem Vektor $-3\vec{v}$ jenen Vektor verstehen, der die dreifache Länge von $\vec{v}$ hat, aber in die Gegenrichtung weist. Nun kann mas sich letzteren uns auf zwei Arten entstanden denken, nämlich eben als $-(3\vec{v})$ (Gegenvektor von $3\vec{v}$) oder als $(-3)\vec{v}$, also als das Produkt der Zahl -3 mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$. Beide Interpretationen sollen definitionsgemäss dasselbe bedeuten, also

Definition des Produktes einer Zahl mit einem Richtungsvektor

Sei $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ ein Richtungsvektor und s eine Zahl. Dann ist

$$s \cdot \vec{v} = [s \cdot v_1, s \cdot v_2, s \cdot v_3] \tag{3.58}$$

wie folgt definiert ist

- Wenn $s = 0$ ist, dass ist das Ergebnis der Nullvektor
- Wenn $s > 0$ ist, dann ist das Ergebnis ein Richtungsvektor in dieselbe Richtung wie $\vec{v}$, jedoch mit der s-fachen Länge.

- Wenn $s < 0$ ist, dann ist das Ergebnis ein Richtungsvektor in die Gegenrichtung von $\vec{v}$ und mit der $|s|$-fachen Länge von $\vec{v}$.

Zur Illustration zwei Beispiele:

$2.5 \cdot [1, -2, 3] = [2.5, -5, 7.5]$ hat dieselbe Richtung wie $[1, -2, 3]$, jedoch die zweieinhalbfache Länge.

$-2.5 \cdot [1, -2, 3] = [-2.5, +5, -7.5]$ hat die Gegenrichtung von $[1, -2, 3]$ und die zweieinhalbfache Länge.

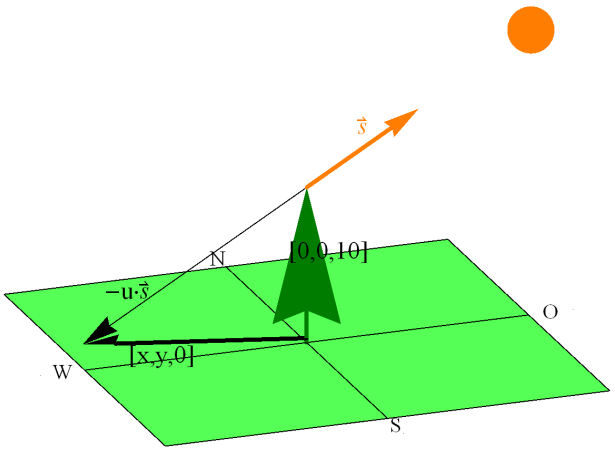
3.3.4.4. Beispiel

Nun sind wir für ein etwas grösseres, praktisch bedeutsames Beispiel bereit. Wir wollen den Schatten der Spitze einer 10 m hohen Tanne auf der horizontalen Ebene am 1. Mai morgens um 9 Uhr in Luzern berechnen.

Im letzten Beispiel haben wir den Richtungsvektor zur Sonne zu diesem Zeitpunkt bestimmt. Er ist

$$\vec{s} = [0.112, -0.883, 0.456]_{\text{Horizont}} \tag{3.59}$$

Wir machen nun folgende Überlegung: Der Schatten der Tannenspitze ist dort, wo der Sonnenstrahle, der die Tannenspitze streift, auf die hoizontale Ebene trifft. Wenn wir uns also in Gedanken vom Fuss der Tanne aus zuerst 10 m in Richtung Zenit zur Spitze der Tanne und danach um ein vorerst noch unbekanntes Vielfaches u in Gegenrichtung zur Sonnenrichtung bewegen, bis wir wieder auf dem Boden ankommen, so sind wir am Ort des Schattens der Tannenspitze.



In eine Formel gegossen heisst das

$$[0, 0, 10]_{\text{Horizont}} + u \cdot (-\vec{s}) = [x, y, 0]_{\text{Horizont}} \tag{3.60}$$

oder, mit der oben errechneten Richtung zur Sonne

$$[0, 0, 10]_{\text{Horizont}} + u \cdot [-0.112, +0.883, -0.456]_{\text{Horizont}} = [x, y, 0]_{\text{Horizont}} \tag{3.61}$$

Hier stellt x die gesuchte Südkomponente des Schattens (welche natürlich negativ herauskommen wird, weil der Schatten zu dieser Zeit in die nördliche Halbebene fällt) und y die gesuchte Westkomponente des Schattens der Tannenspitze dar. u ist der unbekannte Verlängerungsfaktor des Gegenvektors zum Sonnenrichtungsvektor, der die Tannenspitze streift. Damit haben wir total 3 Unbekannte.

Nun wenden wir die oben herausgearbeiteten Regel für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, sowie die Regel über die Subtraktion von Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, auf die letzte Gleichung an.

$$[0, 0, 10]_{\text{Horizont}} - [u \cdot 0.112, -u \cdot 0.883, u \cdot 0.456]_{\text{Horizont}} = [x, y, 0]_{\text{Horizont}} \tag{3.62}$$

$$[-u \cdot 0.112, u \cdot 0.883, 10 - u \cdot 0.456]_{\text{Horizont}} = [x, y, 0]_{\text{Horizont}} \tag{3.63}$$

Links und rechts des Gleichheitszeichens steht je eine äusserlich unterschiedliche Darstellungen desselben Vektors im selben System. Sie müssen also komponentenweise gleich sein. Vergleichen wir die beiden 3. Komponenten: Damit die Schattenspitze auf der horizontalen Ebene liegt, muss ihre Zenitkomponente 0 sein.

$$10 - u \cdot 0.456 = 0 \tag{3.64}$$

Daraus lässt sich der Verlängerungsfaktor u bestimmen.

$$u = \frac{10}{0.456} = 21.93 \tag{3.65}$$

Wenn wir diesen Wert auf der linken Seite von Gleichung Gleichung 3.63einsetzen, erhalten wir den Vektor vom Fusspunkt der Tanne zur Schattenspitze.

$$[-2.46, 19.36, 0]_{\text{Horizont}} \tag{3.66}$$

Um vom Fuss der Tanne zum Schatten ihrer Spitze zu gelangen, muss man also 2.46 m nach Norden und 19.36 m nach Westen gehen.

3.3.5. Beschreibung von Punkten mit Hilfe von Vektoren

Im letzten Beispiel haben wir nicht nur Richtungen mit Hilfe von Vektoren festgelegt. Auch die Position der Tannenspitze oder jene ihres Schattens haben wir mit Hilfe von Vektoren beschrieben. Im Beispiel diente der Fusspunkt der Tanne als Fixpunkt. Dann wurde mit Hilfe eines Vektors beschrieben, mit welcher Bewegung man von diesem Fixpunkt aus zur Tannenspitze resektive zu ihrem Schatten gelangt.

Das ist eine andere interessante und wichtige Anwendung von Vektoren. Wenn wir einen Fixpunkt im Raum vorgeben, können wir jeden Punkt P des Raumes mit Hilfe eines Vektors beschreiben. Dazu gibt man die Bewegung vor, mit der man vom Fixpunkt aus nach P gelangt. Diesen Bewegungsvektor nennt man den Ortsvektor von P, seine Komponenten die *Koordinaten* des Punktes P.

Ein System bestehende aus drei Referenzrichtungen und einem Fixpunkt nennt man ein *Koordinatensystem*. Der Fixpunkt heisst der *Ursprung* des Koordinatensystems.

Im letzten Beispiel hatte der Schatten der Tannenspitz im Horizontsystem die Koordinaten

$$[-2.46, 19.36, 0]_{\text{Horizont}} \tag{3.67}$$

und die Tannenspitze selber die Koordinaten

$$[0, 0, 10]_{\text{Horizont}} \tag{3.68}$$

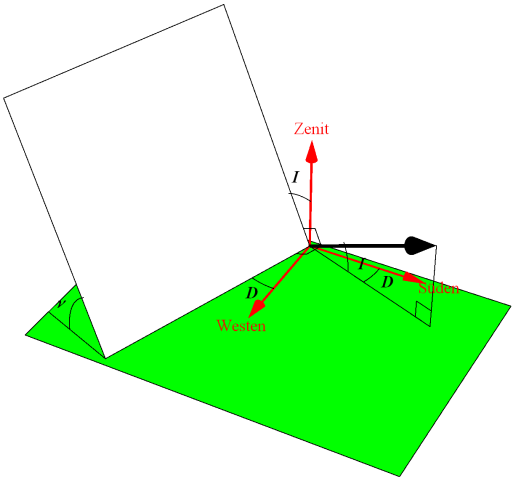
3.4. Das Koordinatensystem des Zifferblattes

Mit dem im letzten Beispiel mit der Tanne aufgezeigten Gedankengang könnten wir im Prinzip auch eine Sonnenuhr mit punktförmigem Schattenwerfer auf einer horizontalen Ebene berechnen. Nun sind aber Sonnenuhren an vertikalen oder geneigten Wänden besser aus Distanz ablesbar und daher sehr viel häufiger anzutreffen. Zur Beschreibung von Richtungen und Punkten auf einer vertikalen oder gar schiefen Ebene wäre das Horizontsystem mit seinen nach den vier Himmelsrichtungen orientierten Referenzurichtungen aber sehr unpraktisch.

Wir machen uns in diesem Abschnitt Gedanken, wie wir Richtungen oder Punkte in einer für die Berechnung des Schattens auf dem Zifferblatt tauglichen Form darstellen können. Dazu brauchen wir wieder ein System geeigneter Referenzrichtungen.

Zuerst müssen wir die Ausrichtung des Zifferblattes beschreiben. Zu diesem Zweck denken wir uns einen Vektor, der auf der Zifferblattebene senkrecht steht und vom Zifferblatt aus in Richtung zum Beobachter weist (schwarzer Pfeil im Bild). Die beiden Richtungswinkel dieser sogenannte *Zifferblattnormalen* im Horizontsystem eignen sich für diesen Zweck gut. Das Azimut der Zifferblattnormalen beschreibt die Himmelsrichtung und die Höhe der Zifferblattnormalen die Neigung des Zifferblattes gegenüber der Vertikalen. Das Azimut der Zifferblattnormalen nennt man die *Abweichung* oder *Deklination*, ihre Höhe die *Neigung* oder *Inklination* des Zifferblattes. Die Deklination bezeichnen wir mit D, die Inklination mit I. Bezüglich der Bezeichnung "Neigung" ist Vorsicht am Platz. Verschiedene Gnomoniker bezeichnen mit diesem Begriff den Winkel v, den die Zifferblattebene mit der Horizontebene einschliesst. I und v sind aber nicht identisch, sondern Komplementwinkel, d.h., es gilt $I + v = 90°$.

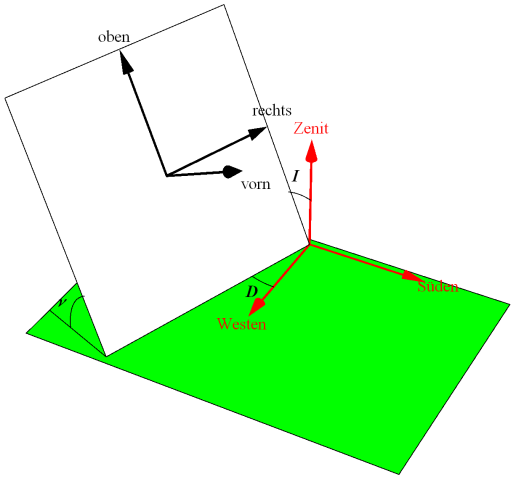
Abbildung 3.21. Die Ausrichtung eines Zifferblattes



Die Abweichung D des Zifferblattes ist das Azimzut der (schwarzen) Zifferblattnormalen, die Neigung I des Zifferblattes ist der Höhenwinkel der Zifferblattnormalen.

Auf der Fläche, welche das Zifferblatt trägt, wollen wir Richtungen, Punkte, Linien oder andere Figuren zahlenmässig beschreiben können. Dazu brauchen wir zwei Referenzrichtungen und einen Ursprung. Als Referenzrichtungen wählten wir "nach rechts" und "nach oben" . Diese beiden Richtungen ergänzen wir durch die Zifferblattnormale "nach vorn" zu einem räumlichen System, dem sogenannten *Zifferblattsystem*. .

Abbildung 3.22. Das Horizont- und das Zifferblattkoordinatensystem



Das Horzontkoordiantensystem (rot) verwendet "nach Süden", "nach Westen" und "nach dem Zenit" als Bezugsrichtungen, das Zifferblattsystem (schwarz) nach "horizontal nach rechts", "in der Falllinie nach oben" und "senkrecht nach vorn".

Bei einem vertikalen oder geneigten Zifferblatt stellen wir uns dabei vor, dass wir vor dem Zifferblatt stehen. Die Referenzrichtung "nach rechts" wird parallel zu einer horizontalen Geraden, "nach oben" parallel zu einer Fallgeraden auf der Zifferblattebene gewählt. Bei einem horizontalen Zifferblatt, etwa für eine Gartenuhr, ist die Richtung einer horizontalen Geraden in der Ebene nicht eindeutig und es gibt keine Fallrichtung. In diesem Fall stellen wir uns vor, wir ständen am südlichen Rand des Zifferblattes und richteten unseren Blick nach Norden. Somit identifizieren wir "nach rechts" mit "nach Osten", "nach oben" mit "nach Norden" und "nach vorn" mit "zum Zenit". Bei diesen Vereinbarungen bilden die ersten beiden Bezugsrichtungen vom Betrachter der Sonnenuhr aus gesehen ein ebenes Koordinatensystem, wie wir es uns von der ebenen Geometrie her gewohnt sind: 1. Achse nach rechts, 2. Achse nach oben.

Wenn wir noch einen Ursprung auf dem Zifferblatt festlegen, können wir weitere Punkte mit Hilfe eines Koordinatentripels beschreiben. So würde z.B. $[-5, -3, 2]$ in diesem System den Punkt bedeuten, der vom Ursprung aus gerechnet 5 Einheiten links, 3 Einheiten unterhalb und 2 Einheiten vor dem Ziffeblatt liegt, wobei noch zu vereinbaren wäre, was eine Einheit sein soll; bei einer grösseren Wandsonnenuhr könnte das z.B. 1 Dezimeter sein (aber man muss sich natürlich nicht an das metrische System halten). Zur Kennzeichnung, dass sich gegebene Komponenten auf das Zifferblattsystem beziehen, verwenden wir in der Regel den Index ZB, also zum Beispiel

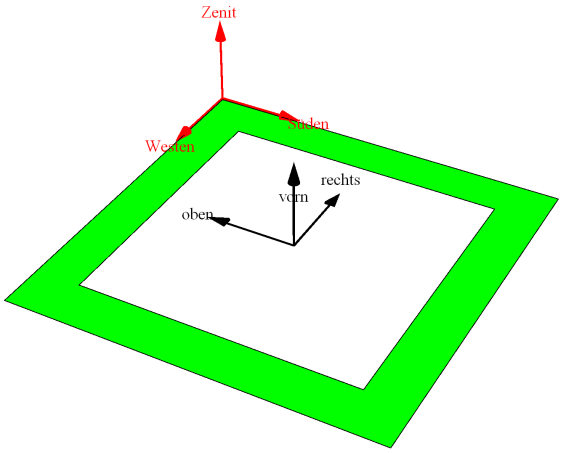
$$[-5, -3, 2]_{ZB} \tag{3.69}$$

Wenn mehrere Zifferblätter verschiedener Ausrichtung betrachtet werden, werden wir die Kennzeichnung nach Bedarf wählen.

3.4.1. Das Zifferblattsysttem auf einem horizontalen Zifferblatt

Wie gesagt, verwenden wir im Zifferblattsystem als 1. Referenzrichtung "nach Osten", als 2. "nach Norden" und als 3. "zum Zenit".

Abbildung 3.23. Horizontales Zifferblatt



Die Beziehung zwischen dem Horizontsystem und dem Zifferblattsystem der horizontalen Sonnenuhr.

Nun müssen wir den Zusammenhang des horizontalen Zifferblattsystemes mit dem Horizontsystem beschreiben. Nehmen wir an, ein Richtungsvektor $\vec{v}$ werde einerseits im Horizontsystem und andererseits im Zifferblattsystem beschrieben.

$$\vec{v} = [z_1, z_2, z_3]_{ZB} = [h_1, h_2, h_3]_{Horizont} \tag{3.70}$$

Die Komponenten haben also folgende Bedeutungen:

z_1: "nach Osten", z_2: "nach Norden", z_3: "zum Zenit".

h_1: "nach Süden", h_2: "nach Westen", h_3: "zum Zenit".

Daraus erkennen wir folgende Zusammenhänge:

(3.71)

Somit gilt

$$\vec{v} = [-h_2, -h_1, h_3]_{ZB} \tag{3.72}$$

3.4.1.1. Beispiel

Ein Schattenwerfer in Form einer kleinen Kugel sei 1 m über eine horizontalen Zifferblatt einer Gartensonnenuhr in Luzern positioniert. Wohin fällt der Schatten am 1. August um 15.00 Uhr?

Weil wir mit Punkten rechnen wollen, brauchen wir einen Ursprung als Referenzpunkt. Dafür wählen wir den Fusspunkt des Lotes vom Kugelzentrum auf die Zifferblattebene[3]. Weil die

[3]Dieses können wir bei Bedarf später noch nach praktischen oder künstlerischen Kriterien erweitern oder beschneiden.

Kugel klein ist, abstrahieren wir sie durch einen Punkt, nämlich ihr Zentrum. Die Masseinheit sei 1 m. Dann hat die Kugel die Koordinaten

$$\vec{k} = [0, 0, 1]_{\mathrm{ZB}} \tag{3.73}$$

Zuerst müssen wir die Richtung bestimmen, aus welcher die Sonne auf das Zifferblatt scheint. Da wir den Schatten auf dem Zifferblatt am bequemsten im Zifferblattsystem ausdrücken können, wollen wir die Sonnenrichtung in Zifferblattkomponenten ausdrücken. Aus dem Datum und der Uhrzeit lassen sich die Deklination und der Stundenwinkel berechnen, also Grössen im Äquatorsystem. Aus ihnen bestimmen wir dann zuerst die Komponenten eines Richtungsvektors zur Sonne im Äquatorsystem. Diese werde dann ins Horizontsystem und schliesslich in Zifferblattsystem umgerechnet. Anschliessend können wir den Schatten der Kugel mit derselben Überlegung wie den Schatten der Tannenspitze berechnen.

1. Aus dem Datum lässt sich die *Deklination* näherungsweise nach der Formel Gleichung 3.23 berechnen. Der 1. August ist der 213. Tag des Jahres, somit

$$\begin{aligned}\delta \approx\ & 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot 213 - 79.64°) \\ & + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot 213 - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot 213 - 59.93°)\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\delta \approx 17.89° \tag{3.75}$$

Um den Stundenwinkel zu bestimmen, müssen wir zuerst die wahre Ortszeit berechnen. Am 1. August gilt die Sommenrzeit. 15.00 Uhr entspricht 14.00 Uhr mitteleuropäischer Normalzeit (MEZ). Die MEZ lässt sich nach Formel Gleichung 1.33 in die wahre Ortszeit zurückrechnen.

$$\mathrm{WOZ} = 14 - \mathrm{ZV} + \mathrm{ZG} \tag{3.76}$$

Dabei ist gemäss Formel Gleichung 1.32 die Zeitverschiebung von Luzern ($\lambda = 8.3°$) gegenüber dem 15. Längengrad (in Stunden)

$$\mathrm{ZV} = 1 - \frac{8.3°}{15°} = 0.447 \tag{3.77}$$

Der Wert der Zeigleichung ist vom Datum abhängig. Wie erwähnt, ist der 1. August der 213. Tag des Jahres. Die Formel Gleichung 1.29 liefert für $n = 213$ (in Stunden)

$$\mathrm{ZG} \approx -0.125 \cdot \sin(213 \cdot 0.9856° - 2.6°) + 0.165 \cdot \sin(213 \cdot 1.971° - 155.2°) \tag{3.78}$$

$$\mathrm{ZG} \approx -0.110 \tag{3.79}$$

Damit erhalten wir die wahre Ortszeit in Stunden nach Gleichung 1.33

$$\mathrm{WOZ} = 14 - 0.447 - 0.110 = 13.444 \tag{3.80}$$

Der Stundenwinkel ist somit nach Gleichung 3.24

$$\tau = (13.443 - 12) \cdot 15° = 21.66° \tag{3.81}$$

2. Deklination und Stundenwinkel werden nun nach der Formel Gleichung 3.25 in einen Richtungsvektor $\vec{s} = [a_1, a_2, a_3]_{\ddot{A}quator}$ mit Komponenten im Äquatorsystem umgerechnet

$$a_1 = \cos(17.89°) \cdot \cos(21.65°) = 0.88445$$
$$a_2 = \cos(17.89°) \cdot \sin(21.65°) = 0.35125 \qquad (3.82)$$
$$a_3 = \sin(17.89°) = 0.30719$$

also

$$\vec{s} = [0.88445, 0.35125, 0.30719]_{\text{Äquator}} \qquad (3.83)$$

3. Dieser Vektor wird nun in Komponenten des Horizontsystems $\vec{s} = [h_1, h_2, h_3]_{\text{Horizont}}$ umgerechnet. Dann gilt gemäss Formeln Gleichung 3.37 an eine Ort mit der geographischen Breite φ (Luzern 47°)

$$h_1 = 0.88445 \cdot \sin(47°) - 0.30719 \cdot \cos(47°) = 0.43734$$
$$h_2 = 0.35125 \qquad (3.84)$$
$$h_3 = 0.88445 \cdot \cos(47°) + 0.30719 \cdot \sin(47°) = 0.82786$$

Damit ist die Richtung zur Sonne im Horizontsystem durch

$$\vec{s} = [0.43734, 0.35215, 0.82786]_{\text{Horizont}} \qquad (3.85)$$

gegeben.

4. Schliesslich gehen wir auf das Zifferblattsystem über. Gemäss Gleichung 3.72 gilt dafür

$$\vec{s} = [-0.35215, -0.43734, 0.82786]_{\text{ZB}} \qquad (3.86)$$

5. Endlich können wir den Schatten der Kugel auf dem Zifferblatt berechnen. Er liegt, von der Kugel aus betrachtet, in Richtung eines Sonenstrahles, also in Gegenrichtung zur Sonne, auf dem Zifferblatt. Wir gehen also in Gedanken zuerst vom Ursprung aus zur Kugel und dann von dort aus um ein unbekanntes Vielfaches des Sonnenstrahles weiter, bis wir wieder auf dem Zifferblatt angelangt sind. Wenn wir den Richtungsvektor zwischen dem Ursprung und dem Kugelschatten mit $\vec{k'}$ bezeichnen, so kann man den obigen Gedanken in eine Formel schreiben

$$\vec{k'} = \vec{k} - u \cdot \vec{s} = [0, 0, 1]_{\text{ZB}} - u \cdot [-0.35215, -0.43734, 0.82786]_{\text{ZB}} \qquad (3.87)$$

wobei u der unbekannte Vervielfachungsfaktor des Gegenvektors zur Sonne ist. Aus obiger Gleichung erhalten wir nach den Gesetzen der Vektorrechnung

$$\vec{k'} = [u \cdot 0.35215, u \cdot 0.43734, 1 - u \cdot 0.82786]_{\text{ZB}} \qquad (3.88)$$

Nun liegt der Schatten ja auf dem Zifferblatt; die 3. Zifferblattkomponente ("vor dem Zifferblatt") muss also 0 sein.

$$1 - u \cdot 0.82786 = 0 \qquad (3.89)$$

Daraus kann u berechnet werden.

$$u = \frac{1}{0.82786} = 1.20793 \qquad (3.90)$$

Diesen Wert können wir nun in der obigen Formel für $\vec{k'}$ einsetzen und erhalten

$$\vec{k'} = [1.20793 \cdot 0.35215,\ 1.20793 \cdot 0.43734,\ 1 - 1.20793 \cdot 0.82786]_{ZB} \tag{3.91}$$

und auf Millimeter gerundet schliesslich

$$\vec{k'} = [0.425,\ 0.528,\ 0]_{ZB} \tag{3.92}$$

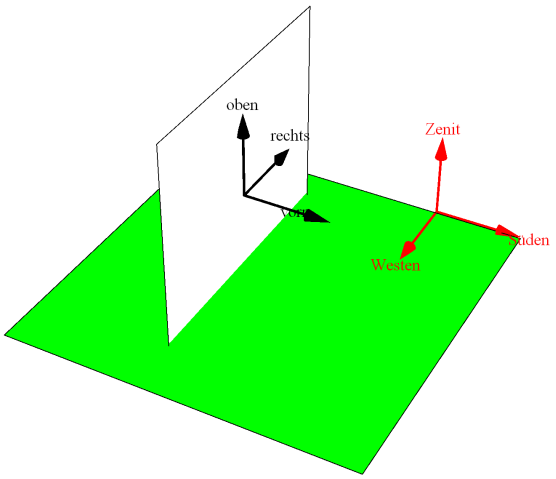
Wir erinnern uns: Die 1. Komponenten im Zifferblattsysstem bedeutet "nach rechts", die 2. "nach oben" und die 3. "nach vorn", wenn wir am Südrand des Zifferblattes stehen und nach Norden blicken. Der Schatten würde also 425 mm rechts und 528 mm oberhalb des Ursprungs auf dem Zifferblatt liegen, wobei der Ursprung abmachungsgemäss senkrecht unter der Kugel auf dem Zifferblatt liegt.

3.4.2. Das Zifferblattsystem auf einem vertikalen Zifferblatt

Wie schon beim horizontalen Zifferblatt müssen wir Formeln finden, mit deren Hilfe man die Komponenten von Richtungsvektoren im Horizontsystem ("nach Süden", "nach Westen" und "zum Zenit") in Komponenten im Zifferblattsystem ("nach rechts", "nach oben" und "nach vorn") umrechnen können.

Wir betrachten zuerst einen Spezialfall, nämlich ein vertikales Zifferblatt, das genau nach Süden ausgerichtet ist. In diesem Fall ist es besonders einfach, wie das folgende Bild zeigt.

Abbildung 3.24. Vertikales Südzifferblatt



Die Beziehung zwischen dem Horizontsystem und
dem Zifferblattsystem der vertikalen Südsonnenuhr.

Nehmen wir wieder an, ein Richtungsvektor sei sowohl in Horizont-, wie auch in Zifferblatt-komponenten dargestellt. Um das Zifferblattsystem der vertikalen Süduhr von jenem einer allgemeinen vertikalen Uhr zu unterscheiden, wählen wir für ersteres den Index SZB.

$$\vec{v} = [s_1, s_2, s_3]_{\mathrm{SZB}} = [h_1, h_2, h_3]_{\mathrm{Horizont}} \tag{3.93}$$

Die 1. Bezugsrichtung auf dem Südzifferblatt, "nach rechts", und weist genau nach Osten, was wir mit "minus Westen" identifiziert haben. "nach Westen" ist aber die 2. Horizontreferenzrichtung. Es gilt also

$$s_1 = -h_2 \tag{3.94}$$

Die 2. Zifferblattreferenzrichtung "nach oben" deckt sich mit der 3. Horizontreferenzrichtung "zum Zenit", also

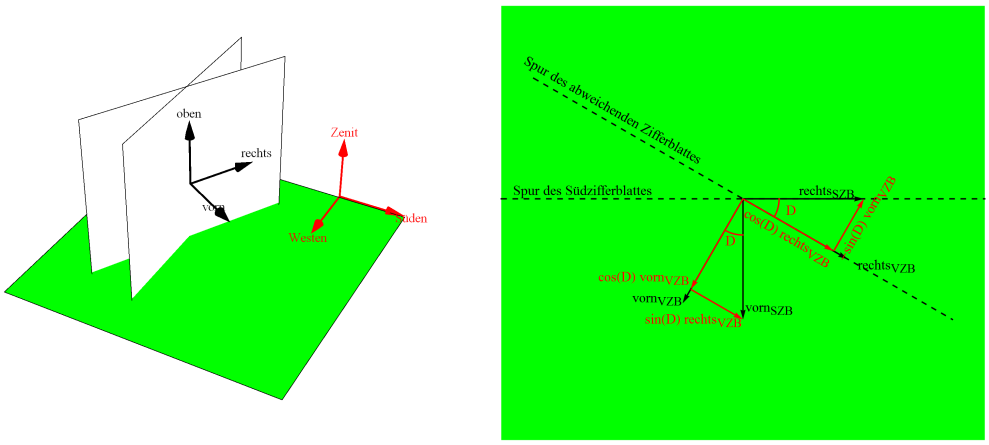
$$s_2 = h_3 \tag{3.95}$$

Die 3. Zifferblattreferenzrichtung "nach vorn" schliesslich ist identisch mit der 1. Horizontreferenzrichtung "nach Süden", also

$$s_3 = h_1 \tag{3.96}$$

In einem zweiten Schritt drehen wir nun das Südzifferblatt an einer vertikalen Achse um den Winkel D nach Westen. D ist die *Abweichung* des Zifferblattes.

Abbildung 3.25. Übergang von der vertikalen Südsonnenuhr zur vertikalen abweichenden Sonnenuhr



Räumliche Sicht. Grundriss

Nun müssen wir den Zusammenhang zwischen dem Zifferblattsystem der vertikalen Süduhr und jenem der abweichenden Uhr herstellen. Diejenigen Leserinnen und Leser, welche mit den trigonometrischen Funktionen nicht vertraut sind, können die folgenden Überlegungen überspringen und einfach das Ergebnis zur Kenntnis nehmen.

Ein Richtungsvektor sei in Komponenten beider Systeme gegeben. Wir bezeichnen die Komponenten bezüglich dem System des Südzifferblattes wieder mit dem Index SZB und jenes des allgemeinen vertikalen Zifferblattes mit dem Index VZB.

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]_{\mathrm{VZB}} = [s_1, s_2, s_3]_{\mathrm{SZB}} \tag{3.97}$$

Die zugehörigen Referenzrichtungen spezifizieren wir ebenfalls mit dem entsprechenden Index, als zum Beispiel $\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{SZB}}$ oder $\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{VZB}}$.

Die Richtung "nach oben" ist beiden Systemen gemeinsam ist.

$$\overrightarrow{\text{oben}}_{\text{VZB}} = \overrightarrow{\text{oben}}_{\text{SZB}} \tag{3.98}$$

und entsprechend sind auch die zugehörigen Komponenten gleich.

$$v_2 = s_2 \tag{3.99}$$

Nun betrachten wir das Bild rechts in der obigen Figur. Es stellt den Grundriss der Szene im linken Bild dar. Eingezeichnet sind die Spuren der beiden Zifferblattebenen in der Grundrissebene. Die Richtungem "nach rechts" und "nach vorn" in den beiden Systemen sind mir schwarzen Pfeilen angegeben. Nun stellen wir die Referenzrichtungsvektoren des Südzifferblattes durch die Referenzrichtungsvektoren des allgemeinen Zifferblattes dar. Der Zeichnung entnehmen wir

$$\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{SZB}} = \cos(D)\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{VZB}} - \sin(D)\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{VZB}} \tag{3.100}$$

sowie

$$\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{SZB}} = \cos(D)\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{VZB}} + \sin(D)\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{VZB}} \tag{3.101}$$

Sei nun ein Richtungsvektor $\vec{v}$ durch seine Komponenten $[s_1, s_2, s_3]_{\text{SZB}}$ des Südzifferblattes gegeben. Diese Komponenten stellen jenen Vektor dar, der durch die Bewegung "Auf dem Südzifferblatt s_1 Einheiten nach rechts, s_2 Einheiten nach oben und s_3 Einheiten nach vorn" gegeben ist, oder in einer Formel

$$\vec{v} = s_1\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{SZB}} + s_2\overrightarrow{\text{oben}}_{\text{SZB}} + s_3\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{SZB}} \tag{3.102}$$

Nun ersetzen wir in dieser Formel die drei Referenzrichtungsvektoren $\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{SZB}}$, $\overrightarrow{\text{oben}}_{\text{SZB}}$ und $\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{SZB}}$ des Südzifferblattes durch ihre Darstellung in Referenzrichtungen bezüglich des allgemeinen Zifferblatte, wie wir sie oben hergeleitet haben.

$$\vec{v} = s_1\left(\cos(D)\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{VZB}} - \sin(D)\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{VZB}}\right) + s_2\overrightarrow{\text{oben}}_{\text{VZB}} + s_3\left(\cos(D)\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{VZB}} + \sin(D)\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{VZB}}\right) \tag{3.103}$$

Nach ein paar elementaren algebraischen Umformungen erhalten wir

$$\vec{v} = \left(s_1\cos(D) + s_3\sin(D)\right)\overrightarrow{\text{rechts}}_{\text{VZB}} + s_2\overrightarrow{\text{oben}}_{\text{VZB}} + \left(-s_1\sin(D) + s_3\cos(D)\right)\overrightarrow{\text{vorn}}_{\text{VZB}} \tag{3.104}$$

Damit wird

$$\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]_{\text{VZB}} \tag{3.105}$$

wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= s_1\cos(D) + s_3\sin(D) \\ v_2 &= s_2 \\ v_3 &= -s_1\sin(D) + s_3\cos(D) \end{aligned} \tag{3.106}$$

Wir fassen nun die beiden Schritte zusammen: In einem ersten Schritt sind wir von der Darstellung von Richtungsvektoren im Horizontsystem auf ein vertikales Südzifferblatt übergegangen. Die entsprechenden Formeln lautete:

$$[s_1, s_2, s_3]_{\mathrm{SZB}} = [h_1, h_2, h_3]_{\mathrm{Horizont}} \tag{3.107}$$

mit

$$\begin{aligned} s_1 &= -h_2 \\ s_2 &= h_3 \\ s_3 &= h_1 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Vom Südzifferblatt sind wir mit Hilfe der Formeln Gleichung 3.106 zum allgemeinen vertikalen Zifferblatt mit der Abweichung D übergegangen. In diesen ersetzen wir nun die Komponenten des Südzifferblattes gemäss der letzten Formlen durch die Horizontkomponenten und erhalten

$$\begin{aligned} v_1 &= h_1\sin(D) - h_2\cos(D) \\ v_2 &= h_3 \\ v_3 &= h_1\cos(D) + h_2\sin(D) \end{aligned} \tag{3.109}$$

3.4.2.1. Beispiel

Wir variieren das Beispiel des letzten Abschnittes. Ein Schattenwerfer in Form einer kleinen Kugel sei 50 cm vor dem Zifferblatt einer vertikalen, um 20° nach Westen ab weichenden Sonnenuhr in Luzern positioniert. Wohin fällt der Schatten am 1. August um 15.00 Uhr?

Da es sich um den gleichen Ort und den gleichen Zeitpunkt wie beim letzten Beispiel handelt, können wir den Richtungsvektor zur Sonne im Horizontsystem übernehmen:

$$\vec{s} = [0.43734, 0.35215, 0.82786]_{\mathrm{Horizont}} \tag{3.110}$$

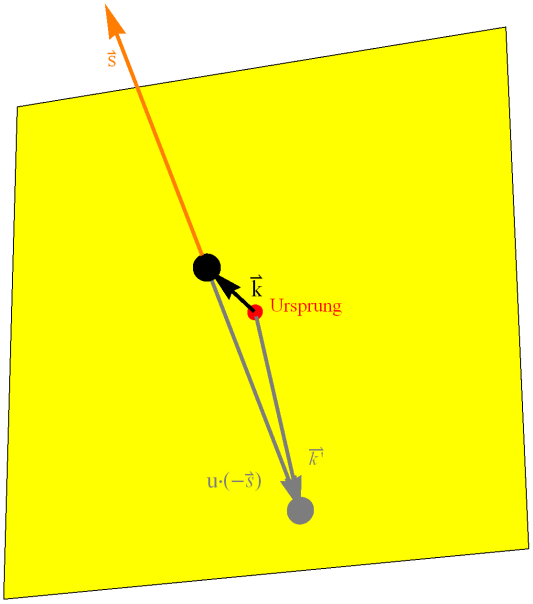
Diese Darstellung in Komponenten des Horizontsystems rechnen wir gemäss Gleichung 3.109 in Komponenten des Zifferblattsystems um. In den obigen Formeln sind folgende Werte gegeben:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0.43734\sin(20°) - 0.35215\cos(20°) = -0.18133 \\ v_2 &= 0.82786 \\ v_3 &= 0.43734\cos(20°) + 0.35215\sin(20°) = 0.53141 \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\vec{s} = [-0.18133, 0.82786, 0.53141]_{\mathrm{VZB}} \tag{3.112}$$

Als Ursprung des Koordinatensystems wählen wir den Fusspunkt des von der Kugel aus auf das Zifferblatt gefällten Lotes. Die Kooridinaten von drücken wir wieder in Metern aus.

Abbildung 3.26. Berechnung des Kugelschattens



Die Kugel hat bezüglich dem Zifferblattsystem die Koordinaten

$$\vec{k} = [0, 0, 0.5]_{\mathrm{VZB}} \tag{3.113}$$

Die Überlegungen zur Berechnung des Richtungsvektors zwischen dem Ursprung und dem Kugelschatten mit $\vec{k'}$ bezeichnen bleiben sinngemäss gleich

$$\vec{k'} = \vec{k} - u \cdot \vec{s} = [0, 0, 0.5]_{\mathrm{VZB}} - u \cdot [-0.18133, 0.82786, 0.53141]_{\mathrm{VZB}} \tag{3.114}$$

wobei u der unbekannte Vervielfachungsfaktor des Gegenvektors zur Sonne ist. Daraus

$$\vec{k'} = [u \cdot 0.18133, \ -u \cdot 0.82786, 0.5 - u \cdot 0.53141]_{\mathrm{VZB}} \tag{3.115}$$

Weil der Schatten auf dem Zifferblatt liegt, muss die 3. Zifferblattkomponente 0 sein.

$$0.5 - u \cdot 0.53141 = 0 \tag{3.116}$$

Daraus kann u berechnet werden.

$$u = \frac{0.5}{0.53141} = 0.94089 \tag{3.117}$$

Diesen Wert können wir nun in der obigen Formel für $\vec{k'}$ einsetzen und erhalten

$$\vec{k'} = [0.94089 \cdot 0.18142, \ -0.94089 \cdot 0.82766, 0.5 - 0.94089 \cdot 0.53110]_{\mathrm{VZB}} \tag{3.118}$$

auf Millimeter gerundet

$$\vec{k'} = [0.171, \ -0.779, 0]_{\mathrm{VZB}} \tag{3.119}$$

Der Schatten der Kugel liegt also 171 mm rechts und 779 mm unterhalb Ursprungs, wobei der Ursprung der Fusspunktes des von der Kugel aus auf das Zifferblatt gefällten Lotes ist.

3.4.3. Das Zifferblattsystem auf einem geneigten Zifferblatt

Im allgemeinsten, wenn auch nicht so häufigen Fall, ist das Zifferblatt zusätzlich noch geneigt.Von den Referenzrichtungen des vertikalen Zifferblattes gelangen wir zu jenen des geneigten Zifferblattes, indem wir jene um den Inklinationswinkel I an der 1. Koordinatenachse drehen. Die Herleitung der Formeln für die Umrechnung der Koordinaten erfolgt analog zum Übergang vom vertikalen Südzifferblatt zum abweichenden Zifferblatt. Wir verzichten in diesem Abschnitt auf die Details und geben gleich das Ergebnis an, wobei wir die Grössen des vertikalen Zifferblattes mit dem Index VZB und jene des allgemeinen (abweichenden und geneigten) Zifferblattsystems mit dem Index ZB kennzeichnen.

Für die Referenzrichtungen gilt der folgende Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\vec{\text{rechts}}_{ZB} &= \vec{\text{rechts}}_{VZB} \\
\vec{\text{oben}}_{ZB} &= \cos(I)\vec{\text{oben}}_{VZB} - \sin(I)\vec{\text{vorn}}_{VZB} \\
\vec{\text{vorn}}_{ZB} &= \sin(I)\vec{\text{oben}}_{VZB} + \cos(I)\vec{\text{vorn}}_{VZB}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Daraus erhält man die Formeln für die Umrechnung von Koordinaten $[v_1, v_2, v_3]_{VZB}$ eines vertikalen Zifferblattes in die Koordinaten $[z_1, z_2, z_3]_{ZB}$ eines an der 1. Achse um I geneigten Zifferblattes wie folgt:

$$\begin{aligned}
z_1 &= v_1 \\
z_2 &= v_2\cos(I) - v_3\sin(I) \\
z_3 &= v_2\sin(I) + v_3\cos(I)
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Weil geneigte Zifferblätter selten sind und die Berechnung des Kugelschattens aufwändig ist, verzichten wir auf ein Rechenbeispiel.

3.5. Die Berechnung der Sonnenuhr

Im Letzten Abschnitt haben wir anhand von Beispielen gezeigt, wie der Schatten einer kleinen Kugel auf ein Zifferblatt an einem gegebenen Ort und zu einem gegebenen Zeitpunkt berechnet werden kann. Das ist genau das Problem, welches man beim Entwurf einer Sonnenuhr mit punktförmigem Schattenwerfer zu lösen hat, allerdings nicht nur für einen einzigen Zeitpunkt. Für eine Uhr mit Tierkreislinien und Zeitgleichungsschleifen müssen bald einmal mehr als 1000 Schattenpunkte berechnet werden. Es lohnt sich also, den Rechengang sorgfältig zu analysieren und wenn möglich in eine computertaugliche Form zu bringen.

Wir stellen im Folgenden die notwendigen Formeln für die einzelnen Schritte zusammen. Der Rechengang zerfällt in zwei Teile

1. Der Sonnenstand muss für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt und als Richtungsvektor in Komponenten des Zifferblattsystems dargestellt werden.

2. Danach kann der Schatten der Kugel auf dem Zifferblatt in Zifferblattkoordinaten berechnet werden.

Wir analysieren die beiden Teile in den folgenden beiden Abschnitten und illustrieren dannach das Vorgehen in einem umfangreicheren Beispiel.

3.5.1. Die Bestimmung des Sonnenstandes

Den Sonnenstand zu einer bestimmten Tageszeit an einem bestimmten Datum kann man vorest durch die beiden Richtungswinkel der Sonne im Äquatorsystem, durch den Stundenwinkel und die Deklination, beschreiben. Aus diesen bestimmt man dann einen Richtungsvektor in Komponenten des Äquatorsystems. Dieser wird schliesslich in Zifferblattkoordinaten umgerechnet. Wir betrachten die einzelnen Teilschritte.

a. Aus dem Datum berechnet man die Deklination δ der Sonne. Sei n die Anzahl der seit Jahresanfang verflossenen Tage. Dann gilt näherungsweise

$$\begin{aligned}\delta \approx\ & 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot n - 79.64°) \\ & + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot n - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot n - 59.93°)\end{aligned} \tag{3.122}$$

Aus der Tageszeit berechnet man den Stundenwinkel τ. Zu diesem Zweck müssen wir die Tageszeit zuerst in die wahre Ortszeit umrechnen. Dazu brauchen wir die Zeitverschiebung

$$\mathrm{ZV} = 1 - \frac{\lambda}{15°} \tag{3.123}$$

wobei λ die geographische Länge des Standortes ist, sowie den Wert der Zeigleichung

$$\mathrm{ZG} \approx 7.38 \cdot \sin(n \cdot 0.9856° + 176.1°) + 9.96 \cdot \sin(n \cdot 1.971° + 200.5°) \tag{3.124}$$

wobei n wieder die Anzahl der seit Jahresanfang verflossenen Tage ist. Wenn die Tageszeit als mitteleuropäische Sommerzeit MSZ gegeben ist, so müssen wir die entsprechende Normalzeit (Winterzeit) berechnen.

$$\mathrm{MEZ} = \mathrm{MSZ} - 1 \tag{3.125}$$

Wenn die bereits als Winterzeit gegeben ist, entfällt natürlich dieser Schritt. Aus der mitteleurpäischen Normalzeit berechnen wir die wahre Ortszeit

$$\mathrm{WOZ} = \mathrm{MEZ} - \mathrm{ZV} + \mathrm{ZG} \tag{3.126}$$

aus welcher schliesslich der Stundenwinkel einfach bestimmt werden kann.

$$\tau = (\mathrm{WOZ} - 12) \cdot 15° \tag{3.127}$$

b. Aus den beiden Richtungswinkeln können wir einen Richtungsvektor $\vec{s}$ zur Sonne in Komponenten des Äquatorsystems $\vec{s} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]_{\text{Äquator}}$ bestimmen, wobei

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\delta) \cdot \cos(\tau) \\ a_2 &= \cos(\delta) \cdot \sin(\tau) \\ a_3 &= \sin(\delta) \end{aligned} \tag{3.128}$$

$\vec{s}$ ist derjenige Richtungsvektor zur Sonne, welcher die Länge 1 hat.

c. Diese Darstellung des Sonnenstandes rechnen wir nun in Zifferblattkomponenten um. Dabei gingen wir zweistufig vor: In einer ersten Stufe haben wir die obige Darstellung in Komponenten des lokalen Horizontsystems $\vec{s} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]_{\text{Horizont}}$, und von diesen aus in einer zweiten Stufe in Komponemten des Zifferblattes $\vec{s} = [z_1, z_2, z_3]_{\text{ZB}}$ umgerechnet.

Die erste Stufe hängt nur vom Standort der Sonnenuhr ab. Für einem Ort mit der geographischen Breite φ erhielten wir:

$$\begin{aligned} h_1 &= a_1 \cdot \sin(\varphi) - a_3 \cdot \cos(\varphi) \\ h_2 &= a_2 \\ h_3 &= a_1 \cdot \cos(\varphi) + a_3 \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{3.129}$$

Die Ausrichtung des Zifferblattes geht dann in die 2. Stufe ein. Dabei wollen wir zwei häufige Spezialfälle betrachtet.

- Am einfachsten war die Rechnung für ein horizontales Zifferblatt. In diesem Falle galt

$$\begin{aligned} z_1 &= -h_2 \\ z_2 &= -h_1 \\ z_3 &= h_3 \end{aligned} \tag{3.130}$$

- Die meisten öffentlichen Sonnenuhren habe vertikale Zifferblätter. Für eine vertikales Zifferblatt, das um den Winkel D aus der Südrichtung nach Westen abweicht gilt

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1\sin(D) - h_2\cos(D) \\ z_2 &= h_3 \\ z_3 &= h_1\cos(D) + h_2\sin(D) \end{aligned} \tag{3.131}$$

- Im allgemeinsten Fall kommt noch eine zusätzliche Neigung des Zifferblattes gegenüber der Vertikalen um einen Winkel I dazu. Weil die Berechnung etwas aufwändig ist und dieser Fall eher selten vorkommt, verzichten wir hier auf die Herleitung und geben einfach die Formeln an.

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1\sin(D) - h_2\cos(D) \\ z_2 &= -h_1\cos(D)\sin(I) - h_2\sin(D)\sin(I) + h_3\cos(I) \\ z_3 &= h_1\cos(D)\cos(I) + h_2\sin(D)\cos(I) + h_3\sin(I) \end{aligned} \tag{3.132}$$

Wir können nun noch diesen zweistufigen Prozess in einen einzigen Schritt zusammenfassen, indem wir in den obigen Formeln jeweils die Darstellung Horizontkomponenten h_1, h_2, h_3 durch die Äquatorkomponenten a_1, a_2, a_3 gemäss den Formeln Gleichung 3.129

ausdrücken. Im allgemeinsten Fall erhalten wir dann die folgenden, etwas umfangreichen Formeln

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3 \\ z_2 &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3 \\ z_3 &= c_{31}a_1 + c_{32}a_2 + c_{33}a_3 \end{aligned} \tag{3.133}$$

wobei die 9 so genannten *Koeffizienten* durch folgende Formeln gegeben sind

- $c_{11} = \sin(\varphi)\sin(D)$
- $c_{12} = -\cos(D)$
- $c_{13} = -\cos(\varphi)\sin(D)$
- $c_{21} = \cos(\varphi)\cos(I) - \sin(\varphi)\cos(D)\sin(I)$
- $c_{22} = -\sin(D)\sin(I)$
- $c_{23} = \cos(\varphi)\cos(D)\sin(I) + \sin(\varphi)\cos(I)$
- $c_{31} = \cos(\varphi)\sin(I) + \sin(\varphi)\cos(D)\cos(I)$
- $c_{32} = \sin(D)\cos(I)$
- $c_{33} = -\cos(\varphi)\cos(D)\cos(I) + \sin(\varphi)\sin(I)$

3.5.2. Die Berechnung des Kugelschattens

Als Ursprung auf dem Zifferblatt legen wir den Fusspunkt des Lotes von der Kugel auf das Zifferblatt fest. Die Kugel hat dann in Koordinaten des Zifferblattsystemes die Darstellung

$$\vec{k} = [0, 0, d]_{\mathrm{ZB}} \tag{3.134}$$

wobei d die Distanz der Kugel zum Zifferblatt ist. Der Vektor vom Ursprung zum Kugelschatten auf dem Zifferblatt hat, wie in den obigen Beispielen erläutert, die Darstellung

$$\vec{k'} = \vec{k} - u \cdot \vec{s} = [0, 0, d]_{\mathrm{ZB}} - u \cdot [z_1, z_2, z_3]_{\mathrm{ZB}} \tag{3.135}$$

wobei $[z_1, z_2, z_3]_{\mathrm{ZB}}$ die Richtung zur Sonne in Zifferblattkoordinaten und u ein vorerst unbekannter Faktor ist. Nach Anwendung der früher hergeleiteten Rechenregeln für Vektoren erhalten wir daraus

$$\vec{k'} = [-u \cdot z_1, -u \cdot z_2, d - u \cdot z_3]_{\mathrm{ZB}} \tag{3.136}$$

Weil nun der Schatten auf dem Zifferblatt liegt, muss die 3. Komponente verschwinden, also $d - u \cdot z_3 = 0$ sein. Daraus

$$u = \frac{d}{z_3} \tag{3.137}$$

In die obige Darstellung eingesetzt erhalten wir

$$\vec{k'} = \left[-d \cdot \frac{z_1}{z_3}, -d \cdot \frac{z_2}{z_3}, 0\right]_{\mathrm{ZB}} \tag{3.138}$$

oder nach der Gesetzen der Vektorrechnung

$$\vec{k} = -\frac{d}{z_3} \cdot \left[z_1, z_2, 0\right]_{ZB} \tag{3.139}$$

3.5.3. Die praktische Berechnung einer Sonnenuhr

In den letzten beiden Abschnitten haben wir die nötigen Formeln zusammengestellt. Nun wollen wir das praktische Vorgehen in einem Beispiel demonstrieren.

Beispiel

Es soll eine Sonnenuhr für eine vertikale, um 15° aus der Südrichtung nach Osten abweichende Wand in Luzern entworfen werden. Als Schattenwerfer diene eine kleine Kugel, welche im Abstand von 50 cm von vor der Wand montiert werden soll.

Wir wollen

- die Stundenlinie für den wahren Mittag,
- die Tierkreislinien zur Wintersonnenwende (Steinbock)
- die Zeitgleichungsschleife für 10 Uhr mitteleuropäischer Zeit

berechnen.

Aufstellen der Transformationsgleichungen

Die Formeln für die Transformation der Äquatorkomponenten von Richtungsvektoren in Zifferblattkomponenten bleiben für jede einzelne Schattenberchnung gleich. Wir stellen daher zuerst diese Formeln auf.

Luzern hat die geographische Länge $\lambda = 8.3°$ und die Breite $\varphi = 47°$. Das Zifferblatt ist vertikal und weicht um 15° nach Osten ab, es hat also die Neigung $I = 0°$ und die Abweichung beträgt $D = -15°$ (die Abweichung wird nach Westen positiv gezählt!).

Die Koeffizienten in den Formeln Gleichung 3.133 für die Umrechnung von von Richtungsvektoren vom Äquator- ins Zifferblattsystem hängen nur von der Lage und der Ausrichtung des Zifferblattes ab. Wir bereiten zuerst die benötigten Werte der trigonometrischen Funktionen vor.

$$\sin(\varphi) = 0.73135 \quad \cos(\varphi) = 0.68200 \tag{3.140}$$

$$\sin(D) = -0.25882 \quad \cos(D) = 0.96593 \tag{3.141}$$

$$\sin(I) = 0 \quad \cos(I) = 1 \tag{3.142}$$

Nun berechnen wir die Koeffizienten

- $c_{11} = \sin(\varphi)\sin(D) = -0.18929$
- $c_{12} = -\cos(D) = -0.96593$
- $c_{13} = -\cos(\varphi)\sin(D) = 0.17651$
- $c_{21} = \cos(\varphi)\cos(I) - \sin(\varphi)\cos(D)\sin(I) = 0.68200$
- $c_{22} = -\sin(D)\sin(I) = 0$

- $c_{23} = \cos(\varphi)\cos(D)\sin(I) + \sin(\varphi)\cos(I) = 0.73135$
- $c_{31} = \cos(\varphi)\sin(I) + \sin(\varphi)\cos(D)\cos(I) = 0.70643$
- $c_{32} = \sin(D)\cos(I) = -0.25882$
- $c_{33} = -\cos(\varphi)\cos(D)\cos(I) + \sin(\varphi)\sin(I) = -0.65876$

Die Umrechungsformeln Gleichung 3.133 stellen wir für die praktische Berechnung in Tabellenform dar.

Tabelle 3.3. Umrechnung von Äquatorkomponenten in Komponenten eines vertikalen Zifferblattes

	a_1	a_2	a_3
$z_1 =$	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$z_2 =$	c_{21}	c_{22}	c_{23}
$z_3 =$	c_{31}	c_{32}	c_{33}

oder, wenn wir die Zahlenwerte für die Koeffizienten einsetzen:

	a_1	a_2	a_3
$z_1 =$	-0.18929	-0.96593	0.17651
$z_2 =$	0.68200	0	0.73135
$z_3 =$	0.70643	-0.25882	-0.65876

Diese Tabelle ist so zu interpretieren: Um eine der drei Zifferblattkomponenten, welche in der 1. Spalte aufgeführt sind, zu berechnen, muss jeder Koeffizient in der betreffenden Zeile mit der darüber im Kopf der Tabelle aufgeführten Komponente des Äquatorsystems multipliziert werden. Danach sind die drei Produkte zu addieren. Zum Beispiel:

$$z_2 = 0.68200 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0.73135 \cdot a_3 \tag{3.143}$$

Die Lage und die Ausrichtung unseres Zifferblattes wird mathematisch offenbar durch das quadratische Schema der 9 Zahlen vollständig beschrieben. Eine solche rechteckige Anordnung von Zahlen nennt man eine *Matrix*, im vorliegenden Fall eine 3 x 3 - Matrix (3 Zeilen und 3 Spalten). Mit Matrizen kann man ähnlich wie mit Komponentendarstellungen von Vektoren rechnen. Der entsprechende Kalkül heisst *Matrixrechnung*.

Der Vorteil dieser Darstellung liegt, neben der Übersichtlichkeit, vor allem darin, dass praktisch alle Mathematikprogramme und sogar vielen Taschenrechner mit Matrizen rechnen können, und somit die gesamte obige Transformation mit einem einzigen Befehl respektive auf Knopfdruck erledigt werden kann. Ein Programm, welches sich für unsere Zwecke bestens eignet, ist die open source software scilab. Bezugsquelle http://www.scilab.org/

Konstruktion der Linie für den wahren Mittag

Weil die Sonnen am wahren Mittag genau im Süden, in der Meridianebene also, steht, liegen alle Schattenpunkte unserer Kugel in der Schnittgeraden der Meridianebene mit der Zifferblattebene. Für eine Gerade genügt es, zwei ihrer Punkte zu bestimmen. Wir berechnen den höchstmöglichen und den tiefstmöglichen Schattenpunkt, also jenen zur Wintersonnenwende und jenen zur Sommesonnenwende. Alle anderen Schattenpunkt am wahren Mittag im Verlauf des Jahres liegen dann auf dem Geradenstück zwischen diesen beiden Punkten.

Zum wahren Mittag beträgt der Stundenwinkel $\tau = 0°$. Der Richtungsvektor zur Sonne hat daher im Äquatorsystem gemäss Gleichung 3.128 die spezielle Gestalt $\vec{s} = [a_1 \;\; a_2 \;\; a_3]_{\text{Äquator}}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\delta) \cdot \cos(\tau) = \cos(\delta) \cdot \cos(0) = \cos(\delta) \\ a_2 &= \cos(\delta) \cdot \sin(\tau) = \cos(\delta) \cdot \sin(0) = 0 \\ a_3 &= \sin(\delta) \end{aligned} \tag{3.144}$$

- Zur Wintersonnenwende beträgt die Deklination der Sonne $\delta = -23.5°$.

  Die Komponenten des Richtungsvektors zur Sonne sind somit im Äquatorsystems somit

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(-23.5°) = 0.91706 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \sin(-23.5°) = -0.39875 \end{aligned} \tag{3.145}$$

  Aus diesen gewinnen wir die Zifferblattkoordinaten

	0.91706	0	−0.39875
$z_1 =$	−0.18929	−0.96593	0.17651
$z_2 =$	0.68200	0	0.73135
$z_3 =$	0.70643	−0.25882	−0.65876

  also

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.18929 \cdot 0.91706 + (-0.96593) \cdot 0 + 0.17651 \cdot (-0.39875) = -0.24397 \\ z_2 &= 0.68200 \cdot 0.91706 + 0 \cdot 0 + 0.73135 \cdot (-0.39875) = 0.33381 \\ z_3 &= 0.70643 \cdot 0.91706 + (-0.25882) \cdot 0 + (-0.65876) \cdot (-0.39875) = 0.91052 \end{aligned} \tag{3.146}$$

  Nun können wir den Schatten gemäss Gleichung 3.139 berechnen. Wir rechnen in Metern

$$\vec{k}' = -\frac{d}{z_3} \cdot [z_1, z_2, 0]_{\text{ZB}} = -\frac{0.5}{0.91052} \cdot [-0.24397, 0.33381, 0]_{\text{ZB}} \tag{3.147}$$

$$\vec{k}' = [0.13398, \; -0.18331, 0]_{\text{ZB}} \tag{3.148}$$

  Der Schatten der Kugel liegt also am Tag der Wintersonnenwende um 12 Uhr wahrer Ortszeit rund 13.4 cm recht und 18.3 cm unterhalb des Zifferblattursprungs.

- Zur Sommersonnenwende beträgt die Deklination der Sonne $\delta = 23.5°$.

  Die Komponenten des Richtungsvektors zur Sonne ist im Äquatorsystems somit

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(23.5°) = 0.91706 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \sin(23.5°) = 0.39875 \end{aligned} \tag{3.149}$$

  Daraus die Zifferblattkoordinaten

	0.91706	0	0.39875
$z_1 =$	−0.18929	−0.96593	0.17651

	0.91706	0	0.39875
$z_2 =$	0.68200	0	0.73135
$z_3 =$	0.70643	−0.25882	−0.65876

somit

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.18929 \cdot 0.91706 + (-0.96593) \cdot 0 + 0.17651 \cdot (0.39875) = -0.10320 \\ z_2 &= 0.68200 \cdot 0.91706 + 0 \cdot 0 + 0.73135 \cdot (0.39875) = 0.91706 \\ z_3 &= 0.70643 \cdot 0.91706 + (-0.25882) \cdot 0 + (-0.65876) \cdot (0.39875) = 0.38516 \end{aligned} \tag{3.150}$$

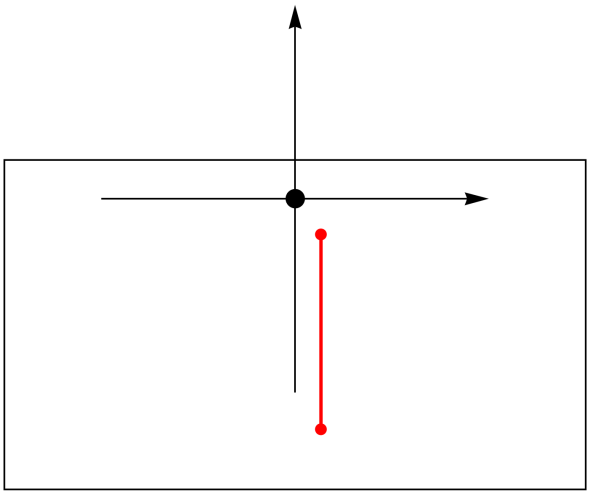
Nun können wir den Schatten gemäss Gleichung 3.139 berechnen. Wir rechnen win Metern

$$\vec{k}' = -\frac{d}{z_3} \cdot [z_1, z_2, 0]_{ZB} = -\frac{0.5}{0.38516} \cdot [-0.10320, 0.91706, 0]_{ZB} \tag{3.151}$$

$$\vec{k}' = [0.13398, -1.19049, 0]_{ZB} \tag{3.152}$$

Der Schatten der Kugel liegt also am Tag der Wintersonnenwende um 12 Uhr wahrer Ortszeit rund 13.4 cm recht und 1 m 19 cm unterhalb des Zifferblattursprungs. Hier das Ergebnis graphisch dargestellt:

Abbildung 3.27. Zifferblatt mit Mittagslinie



Zifferblatt mit Koordinatensystem. Die kleine schwarze Scheibe stellt die Projektion der Kugel dar und markiert den Ursprung. Die Mittagslinie ist rot dargestell, die Schattenpostionen zur Winter- und zur Sommersonnenwende sind mit roten Punkten markiert.

Das Ergebnis bestätigt die im Kapitel 2 festgetellte Tatsache, dass die Linie des wahren Mittags bei einem vertikalen Zifferblatt immer vertikal verläuft.

Berechnung der Tierkreislinie zur Wintersonnenwende

Die Wintersonnenwende ist durch die Sonnendeklination von $\delta = -23.5°$ charakterisiert. Der Richtungsvektor zur Sonne hat im Äquatorsystem gemäss Gleichung 3.128 somit die spezielle Gestalt $\vec{s} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]_{\text{Äquator}}$ mit

$$a_1 = \cos(\delta) \cdot \cos(\tau) = \cos(-23.5°) \cdot \cos(\tau) = 0.91706 \cdot \cos(\tau)$$
$$a_2 = \cos(\delta) \cdot \sin(\tau) = \cos(-23.5°) \cdot \sin(\tau) = 0.91706 \cdot \sin(\tau) \qquad (3.153)$$
$$a_3 = -0.39875$$

Der Sonnenaufgang erfolgt in Luzern am kürzesten Tag des Jahres etwa um 20 Minuten vor 8 Uhr wahrer Ortszeit, der Untergang etwa um 20 Minuten nach 16 Uhr. Der Stundenwinkel beträgt zu diesen Zeiten etwa $\tau_{\text{auf}} = -65°$ respektive $\tau_{\text{unter}} = 65°$. Es ist daher vernünftig, die Tierkreislinie des Steinbocks für diese Zeitspanne zu rechnen. Weil die Tierkreislinien gekrümmt sind (mit Ausnahme jener für die Tagundnachtgleichen), muss man viele Punkte einzeln berechnen, diese auf die Sonnenuhr übertragen und mit einer glatten Kurve verbinden. Weil es sich hier nur um ein Übungsbeispiel handelt berechnen wir nur die Punkte, wo der Schatten zu den vollen Stunden wahrer Ortszeit hinfällt.

- Für 8 Uhr WOZ beträgt der Stundenwinkel $\tau = -60°$.

$$a_1 = 0.91706 \cdot \cos(-60°) = 0.45853$$
$$a_2 = 0.91706 \cdot \sin(-60°) = -0.79420 \qquad (3.154)$$
$$a_3 = -0.39875$$

Aus diesen Äquatorkomponenten gewinnen wir mit der Zifferblattmatrix die Zifferblattkomponenten.

	0.45853	−0.79420	−0.39875
$z_1 =$	−0.18929	−0.96593	0.17651
$z_2 =$	0.68200	0	0.73135
$z_3 =$	0.70643	−0.25882	−0.65876

also

$$z_1 = -0.18929 \cdot 0.45853 + (-0.96593) \cdot (-0.79420) + 0.17651 \cdot (-0.39875) = 0.60996$$
$$z_2 = 0.68200 \cdot 0.45853 + 0 \cdot (-0.79420) + 0.73135 \cdot (-0.39875) = 0.02109 \qquad (3.155)$$
$$z_3 = 0.70643 \cdot 0.45853 + (-0.25882) \cdot (-0.79420) + (-0.65876) \cdot (-0.39875) = 0.79215$$

Nun kann der Schatten gemäss Gleichung 3.139 berechnet werden.

$$\vec{k}' = -\frac{d}{z_3} \cdot \left[z_1, z_2, 0\right]_{\text{ZB}} = -\frac{0.5}{0.79215} \cdot \left[0.60996, 0.02190, 0\right]_{\text{ZB}} \qquad (3.156)$$

$$\vec{k}' = \left[-0.38500, -0.01331, 0\right]_{\text{ZB}} \qquad (3.157)$$

Der Schattenpunkt fällt also am Tag der Wintersonnenwende um 8 Uhr WOZ 38,5 cm links und 1.3 cm unterhalb des Ursprungs auf das Zifferblatt.

- Für 9 Uhr WOZ beträgt der Stundenwinkel $\tau = -45°$. Der Rechengang wird hier mit verkürzer Dokumentation wiedergegeben. Die geneigte Leserschaft kann die Details analog zum Punkt für 8 Uhr WOZ nachvollziehen.

$$a_1 = 0.91706 \cdot \cos(-45°) = 0.64846$$
$$a_2 = 0.91706 \cdot \sin(-45°) = -0.64846 \qquad (3.158)$$
$$a_3 = -0.39875$$

	0.64846	−0.64846	−0.39875
$z_1 =$ $z_2 =$	−0.18929 0.68200	−0.96593 0	0.17651 0.73135
$z_3 =$	0.70643	−0.25882	−0.65876

$$\begin{aligned} z_1 &= 0.43323 \\ z_2 &= 0.15062 \\ z_3 &= 0.88861 \end{aligned} \tag{3.159}$$

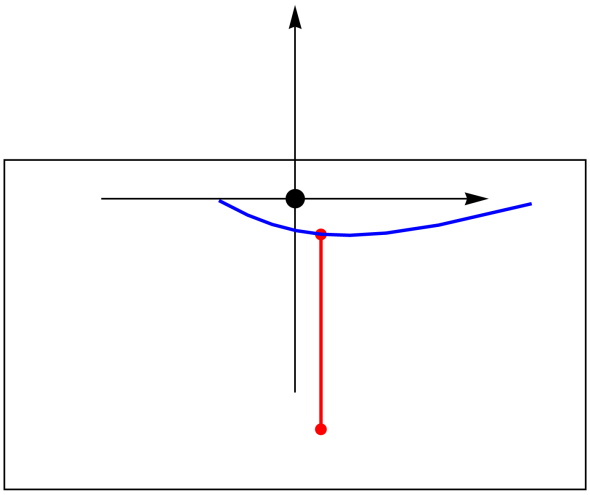
$$\vec{k}' = [-0.24377,\ -0.08475,\ 0]_{ZB} \tag{3.160}$$

- Für die restlichen ganzen Stunden wahrer Ortszeit geben wir nur noch die Endresultate in der folgenden Tabelle zusammen.

Wahre Orts-zeit	**Stundenwinkel**	**Schattenpunkt**
8 Uhr	−60°	$[-0.38500,\ -0.01331,\ 0]_{ZB}$
9 Uhr	−45°	$[-0.24377,\ -0.08475,\ 0]_{ZB}$
10 Uhr	−30°	$[-0.11788,\ -0.13265,\ 0]_{ZB}$
11 Uhr	−15°	$[0.00463,\ -0.16449,\ 0]_{ZB}$
12 Uhr	0°	$[0.13398,\ -0.18331,\ 0]_{ZB}$
13 Uhr	15°	$[0.28254,\ -0.18893,\ 0]_{ZB}$
14 Uhr	30°	$[0.47062,\ -0.17730,\ 0]_{ZB}$
15 Uhr	45°	$[0.74103,\ -0.13620,\ 0]_{ZB}$
16 Uhr	60°	$[1.21286,\ -0.027674,\ 0]_{ZB}$

Zeichnerisch sieht dann die Tierkreislinie wie folgt aus

Abbildung 3.28. Zifferblatt mit Mittagslinie und Steinbocklinie



Die Mittagslinie ist rot, die Steinbocklinie blau eingetragen

Zeitgleichungsschleife für 10 Uhr mitteleuropäische Zeit

Die Zeitgleichungsschleifen haben die Form einer langgezogenen Ziffer 8. Es braucht daher ziemlich viele Einzelpunkte, um den Verlauf glatt zeichnen zu können. Wir rechnen hier die Punkte im Abstand von 15 Tagen, also 25 Punkte über das ganze Jahr.

Die gesuchte Zeitgleichungsschleife ist jene Kurve, auf welche der Kugelschatten im Verlauf des Jahres immer um 10 Uhr MEZ zu liegen kommt.

Da die Position der Sonnen zu einem bestimmeten Zeitpunkt durch ihre Deklination und ihren Stundenwinkel gegeben ist, müssen wir zuerst dies beiden Grössen jeweils im Abstand von 15 Tagen für 10 Uhr MEZ berechnen. Beide Winkel sind vom Datum abhängig. Für die Deklination ist das wegen Gleichung 1.3 offensichtlich

$$\begin{aligned}\delta \approx\ & 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot n - 79.64°) \\ & + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot n - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot n - 59.93°)\end{aligned} \tag{3.161}$$

wobei n die Anzahl der seit Jahresbeginn verflossenen Tage ist. Auch der Stundenwinkel hängt in der Zeitgleichung versteckt von n ab, gilt doch (Gleichung 1.33)

$$\tau = (\mathrm{WOZ} - 12) \cdot 15° \tag{3.162}$$

mit

$$\mathrm{WOZ} = \mathrm{MEZ} - \mathrm{ZV} + \mathrm{ZG} \tag{3.163}$$

wobei ZV die Zeitverschiebung und ZG der Wert der Zeitgleichung ist. Die Zeitverschiebung beträgt für Luzern ($\lambda = 8.3°$)

$$\mathrm{ZV} = 1 - \frac{8.3°}{15°} = 0.447 \tag{3.164}$$

Damit bekommt die Formel für die zu 10 Uhr MEZ gehörige WOZ die Gestalt

$$\mathrm{WOZ} = 9.553 + \mathrm{ZG} \tag{3.165}$$

Wenn wir diesen Wert in die obige Formel Gleichung 3.162 einsetzen, erhalten wir für den Stundenwinkel um 10 Uhr MEZ

$$\tau = (\mathrm{ZG} - 2.447) \cdot 15° \tag{3.166}$$

Der Wert der Zeitgleichung aber hängt, wie gesagt, vom Datum ab. Er beträgt näherungsweise

$$\mathrm{ZG} \approx 0.123 \cdot \sin(n \cdot 0.9856° + 176.1°) + 0.166 \cdot \sin(n \cdot 1.971° + 200.5°) \tag{3.167}$$

Sowohl die Formel für die Sonnendeklination, wie auch jene für die Zeitgleichung sind Näherungsformeln, welche sich auf Mittelwertbildung über einen ganzen Schaltjahreszyklus stützen. Aus diesem Grund und weil die Ablesegenauigkeit auf dem Zifferblatt sowieso nicht allzu gross ist, macht es wenig Sinn, den Wert für n auf Stunden genau auszurechnen. Wir setzen einfachheitshalber jeweils die Nummer des Tages im Jahreskreis ein.

Wir berechnen die ersten zwei Punkte exemplarisch und danach die restlichen Punkte mit dem Computer.

1. Wir bestimmen den Schattenpunkt am Neujahrstag um 10.00 Uhr MEZ. Am 1. Tag des Jahres ist $n = 1$ und die Sonnendeklination beträgt

$$\begin{aligned}\delta \approx\ & 0.37° + 23.26° \cdot \sin(0.98563° \cdot 1 - 79.64°) \\ & + 0.34° \cdot \sin(1.97125° \cdot 1 - 82.91°) + 0.17° \cdot \sin(2.95688° \cdot 1 - 59.93°) = -22.9°\end{aligned} \tag{3.168}$$

Der Wert der Zeitgleichung beträgt

$$\mathrm{ZG} \approx -0.125 \cdot \sin(1 \cdot 0.9856° - 2.6°) + 0.165 \cdot \sin(1 \cdot 1.971° - 155.2°) = -0.057 \tag{3.169}$$

Daraus ergibt sich der Stundenwinkel

$$\tau = (-0.057 - 2.447) \cdot 15° = -37.6° \tag{3.170}$$

Nun gehts weiter wie bei der Berechnung einer Linie für die wahre Ortszeit: Wir berechnen den Richtungsvektor im Äquatorsystem $\vec{s} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]_{\text{Äquator}}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\delta) \cdot \cos(\tau) = \cos(-22.9°) \cdot \cos(-37.6°) = 0.73013 \\ a_2 &= \cos(\delta) \cdot \sin(\tau) = \cos(-22.9°) \cdot \sin(-37.6°) = -0.56147 \\ a_3 &= \sin(-22.9°) = -0.38942 \end{aligned} \tag{3.171}$$

Damit hat der Richtungsvektor zur Sonne im Äquatorsystem die Darstellung

$$\vec{s} = [0.73013 \quad -0.56147 \quad -0.38942]_{\text{Äquator}} \tag{3.172}$$

Dieser wird in das Zifferblattsystem umgerechnet:

	0.73013	0.56147	−0.38942
$z_1 =$	−0.18929	−0.96593	0.17651
$z_2 =$	0.68200	0	0.73135
$z_3 =$	0.70643	−0.25882	−0.65876

daraus

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.18929 \cdot 0.73013 + (-0.96593) \cdot (-0.56147) + 0.17651 \cdot (-0.38942) = 0.33540 \\ z_2 &= 0.68200 \cdot 0.73013 + 0 \cdot (-0.56147) + 0.73135 \cdot (-0.38942) = 0.21314 \\ z_3 &= 0.70643 \cdot 0.73013 + (-0.25882) \cdot (-0.56147) + (-0.65876) \cdot (-0.38942) = 0.91765 \end{aligned} \tag{3.173}$$

also

$$\vec{s} = [0.33540 \quad 0.21314 \quad 0.91765]_{ZB} \tag{3.174}$$

Nun können wir den Schattenpunkt berechnen.

$$\vec{k'} = -\frac{d}{z_3} \cdot [z_1, z_2, 0]_{ZB} = -\frac{0.5}{0.91765} \cdot [0.33540, 0.21314, 0]_{ZB} \tag{3.175}$$

$$\vec{k'} = [-0.18275, \ -0.0.11614, 0]_{ZB} \tag{3.176}$$

2. Für den 16. Januar ist $n = 16$. Wir geben nur die Zwischenresultate und das Endresultat an.

$$\delta \approx -20.8° \tag{3.177}$$

$$ZG \approx -0.156 \tag{3.178}$$

$$\tau = -39.0° \tag{3.179}$$

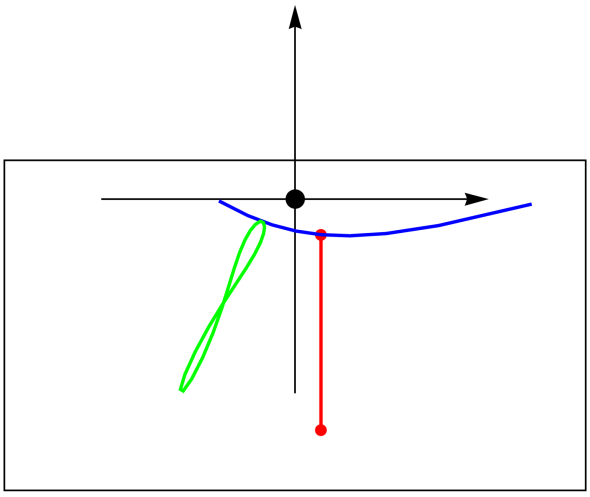
$$\vec{s} = [0.72595 \quad -0.58880 \quad -0.35541]_{Äquator} \tag{3.180}$$

$$\vec{s} = [0.36859 \quad 0.23517 \quad 0.89936]_{ZB} \tag{3.181}$$

$$\vec{k'} = [-0.20492, \ -0.130742, 0]_{ZB} \tag{3.182}$$

Die restlichen Punkte wurden mit dem Computer berechnet, auf das Zifferblatt übertragen und mit einer grünen Linie verbunden. Die vollständige Lösung unseres Beispiels sieht nun so aus:

Abbildung 3.29. Zifferblatt mit Mittagslinie, Steinbocklinie und Zeitlgleichungsschleife für 10 Uhr MEZ



Die Mittagslinie ist rot, die Steinbocklinie blau und die Zeitgleichungsschleife für 10 Uhr MEZ grün eingetragen

Mit diesem Beispiel schliesse ich diese Einführung in die Theorie der Sonnenuhren ab. Wenn eine Leserin oder ein Leser sich ermutigt fühlt, sich selber als Sonnenuhrmacher zu versu-

chen, so freut sich der Autor darüber herzlich. Es macht viel mehr Spass, die Berechnung selber zu wagen, als ein pfannenfertiges, im Detail unüberprüfbares und unverstandenes Programm aus dem Internet herunter zu laden.

Literaturverzeichnis

Messerli Jakob. *Gleichmässig, pünktlich, schnell*. Chronos Verlag Zürich. 1995. ISBN 3-905311-2.

Meyer Jörg. *Die Sonnenuhr und ihre Theorie*. Verlag Harri Deutsch. 2008. ISBN 978-3-8171-1824-3.

Philipp Hugo, Roth Daniel und Bachmann Willy. *Sonnenuhren - Deutschland und Schweiz*. Deutsche Gesellschaft für Chronometrie. 1994. ISBN 3-923-422-12-1.

Rohr René R. J.. *Die Sonnenuhr*. Geschichte, Theorie, Funktion. Callwey Verlag München. 1982. ISBN 3-7667-0610-1.

Zenkert Arnold. *Faszination Sonnenuhr*. Verlag Harri Deutsch. 2009. ISBN 978-3-8171-1752-9.