
Sonnenuhrberechnung mit Vektoren und Matrizen

Louis-Sepp Willimann

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen	3
Komponenten und Richtungswinkel von Vektoren	3
Vektorbasen für Sonnenuhranwendungen	7
Basistransformationen	9
Messung von Deklination und Stundenwinkel der Sonne	18
Der Schatten des Gnomons	20
Die allgemeine Schattenformel	20
Der Gnomonschatten in Standardzifferblattkoordinaten	21
Die gnomonische Abbildung der Himmelsphäre	26
Die Lineaturen für verschiedene Indikationen	34
Stundenwinkel und wahre Ortszeit	35
Deklination und Datum	38
Babylonische und italienische Stunden	45
Temporalstunden	57
Mittlere Zeiten	63
A. Begriffe und Bezeichnungen der Vektorrechnung	68
Literaturverzeichnis	72



Historische Sonnenuhr im Kapuzinerkloster Wesemlin in Luzern

(Bild Adrian Müller)

In der Literatur werden verschiedene Verfahren für den Bau von Sonnenuhren ausführlich beschrieben, neben geometrischen Konstruktionen vor allem auch trigonometrische Berechnungen. Gut verständliche Bücher sind [Zenkert] oder [Rohr].

Die Konstruktion einer Sonnenuhr ist ein Schattenwurfproblem. Da die Sonnenstrahlen zu einer festen Zeit parallel auf die ganze Erde einfallen, stellen Vektoren ein geeignetes mathematisches Konzept zu deren Beschreibung dar, und die Vektorrechnung ist eine etablierte mathematischer Theorie. Um geometrische Vektoren (= Mengen gleichlanger, gleichgerichteter Pfeile) der numerischen Rechnung, z.B. mit Computern, zugänglich zu machen, braucht man eine Vektorbasis, wobei deren geschickte Wahl entscheidend für den Rechenaufwand ist. Die Umrechnung von Komponenten eines bestimmten Vektor bezüglich verschiedenen Basen kann durch Multiplikation mit einer Matrix erfolgen. Die entsprechenden Matrizen enthalten alle für die Berechnung einer bestimmten Sonnenuhr relevanten Daten und liefern weitere interesssante Informationen.

In der vorliegenden Abhandlung wird ein auf Vektorrechnung beruhendes Verfahren zur Berechnung von Sonnenuhren mit einem ebenen Zifferblatt und mit einem punktförmigen Zeiger vorgestellt. Dieser kann eine auf einem Polstab montierte, kleine Kugel oder eine Lochblende, wie im folgenden Bild sein. Bei historischen Sonnenuhren auf der Alpensüdseite für italienische Stunden diente meistens einfach die Spitze eines irgendwie montierten Stabes diesem Zweck. In dieser Abhandlung werden alle als punktförmig gedachten Schatten- oder Lichtpunktwerfer pauschal als *Gnomon* bezeichnen. Mit der hier präsentierten Methode kann man aber durchaus auch Polstabsonnenuhren mit ebenem Zifferblatt berechnen, denn der Schatten des Stabes ist ein Geradenstück, das durch den Schatten von zwei Punkten definiert ist, zum Beispiel dem Schatten der Stabspitze und dem trivialen «Schatten» des Stabfusses.

Abbildung 1. Gnomon in Form einer sonnenförmigen Lochblende



Wandsonnenuhr am Altersheim Erlen in Engelberg. Berechnung P. Bonaventura Thürlemann, künstlerische Gestaltung José de Nève. (2021 hinter Gebäudeisolation verschwunden)

Der vektorielle Ansatz ist an sich nicht neu. In einschlägigen Werken (z.B. [Meyer]) wird aber die Beherrschung dieses mathematischen Werkzeuges oft auf hohem Niveau vorausgesetzt. Im Gegensatz dazu möchte ich hier einen niederschweligen Zugang aufzeigen, welcher sich auch sehr gut als Auffrischung von Mittelschulkenntnissen der Vektorrechnung eignet. Da in den Lehrbüchern nicht immer einheitliche Begriffe und Bezeichnungen verwendet werden, sind die hier verwendeten im Anhang A, *Begriffe und Bezeichnungen der Vektorrechnung* kurz zusammengestellt.

Grundlagen

Komponenten und Richtungswinkel von Vektoren

Zuerst die wichtigsten Begriffe und verwendeten Schreibweisen in Kürze:

Basen und Koordinatensysteme

Um mit Vektoren numerisch zu rechnen und damit der Bearbeitung mit Computern zugänglich zu machen, braucht man eine Basis. Eine *Basis* im Raum ist ein ausgezeichnetes Tripel von linear unabhängigen Vektoren.

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

Wenn die Basisvektoren gegenseitig senkrecht stehen, heisst die Basis *orthogonal*, wenn zusätzlich alle die Länge 1 haben, *orthonormal*. Wenn die Vektoren wie Daumen, Zeigfinger und Mittelfinger der rechten Hand orientiert sind, heisst die Basis *rechtsorientiert*, andernfalls *linksorientiert*. Im Prinzip kann man irgend eine Basis verwenden, doch erleichtert eine geschickte Wahl die Rechnung ganz entscheidend. Im Folgenden werden wir ausschliesslich orthonormale Basen verwenden, denn auch das erleichtert die Rechnung enorm.

Ein zentraler Satz der Vektorrechnung sagt nun, dass jeder Vektor \vec{v} des geometrischen Raumes eindeutig als Linearkombination der Vektoren einer beliebigen Basis dargestellt werden kann, das heisst, dass Zahlen v_1, v_2, v_3 eindeutig bestimmt sind, sodass

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{b}_1 + v_2 \cdot \vec{b}_2 + v_3 \cdot \vec{b}_3$$

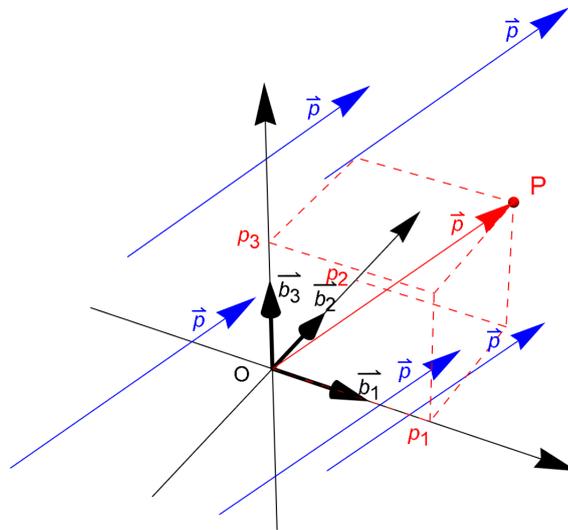
Die Zahlen v_1, v_2, v_3 heissen die (skalaren) *Komponenten* von \vec{v} bezüglich der Basis B . Im Sinne einer Abkürzung schreibe ich die obige Darstellung als Spaltenmatrix mit eckigen Klammern, wobei die Basis als Index angegeben wird.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_B \quad (1)$$

Das ist so zu lesen: Der Vektor \vec{v} hat in der Basis B die Komponenten v_1, v_2, v_3 . Für das Verständnis des Folgenden ist es wichtig, sorgfältig zwischen einem Vektor und seinen Komponenten zu unterscheiden. Ein (geometrischer) Vektor ist die Menge aller mit einem gegebenen Pfeil gleichlangen und gleichgerichteten Pfeile. Ein einzelner solcher Pfeil heisst ein Repräsentant des Vektors. Die Komponenten eines Vektors bezüglich einer bestimmten Basis sind Zahlentripel; zu verschiedenen Basen sind die Komponenten ein und desselben Vektors natürlich verschieden. Das Komponententripel des Vektors \vec{v} bezüglich der Basis B bezeichnen wir hier mit $\vec{v}|_B$.

Wenn man mit Hilfe von Vektoren Punkte im Raum beschreiben will, so braucht man einen ausgezeichneten Bezugspunkt, den sogenannten *Ursprung* O . Gestützt auf diesen ist zu jedem Punkt P des Raumes ein Pfeil definiert, dessen Anfangspunkt O und dessen Endpunkt P ist. Dieser Pfeil ist Repräsentant eines Vektors, den wir den *Ortsvektor* von P nennen. Umgekehrt ist zu jedem Vektor \vec{p} bei gegebenem Ursprung ein Punkt definiert, auf welche die Spitze jenes Repräsentanten zeigt, dessen Anfangspunkt der Ursprung ist.

Abbildung 2. Ein Punkt und sein Ortsvektor



Der rote und die blauen Pfeile sind Repräsentanten des Ortsvektors des Punktes P

Eine Basis zusammen mit einem Ursprung bildet ein *Koordinatensystem*. In einem Koordinatensystem $K = (O, B)$ mit dem Ursprung O und der Basis B heißen die Komponenten des Ortsvektors die *Koordinaten* des zugehörigen Punktes. Zur deutlicheren Unterscheidung des Punktes P von seinem Ortsvektor \vec{p} schreibe ich die Koordinaten von P in Zeile, eingeschlossen in runden Klammern,

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3)_K \quad (2)$$

Wobei der Name des Koordinatensystems, auf welches sich die Komponenten beziehen, auch hier als Index angegeben werden kann.

Richtungswinkel und Richtungsvektoren

Richtungen spielen in der Sonnenuhrenlehre eine wichtige Rolle: Wie ist das Zifferblatt ausgerichtet? Aus welcher Richtung scheint die Sonne? Um Richtungen im Raum festzulegen, stehen zwei Methoden im Vordergrund:

- Die naheliegende Methode verwendet einen Vektor \vec{r} , dessen Länge im Prinzip unerheblich ist. Wenn man frei ist, was im Folgenden fast immer der Fall ist, wählt man mit Vorteil den eindeutig bestimmten Vektor der Länge 1, also den Einheitsvektor in die entsprechenden Richtung.

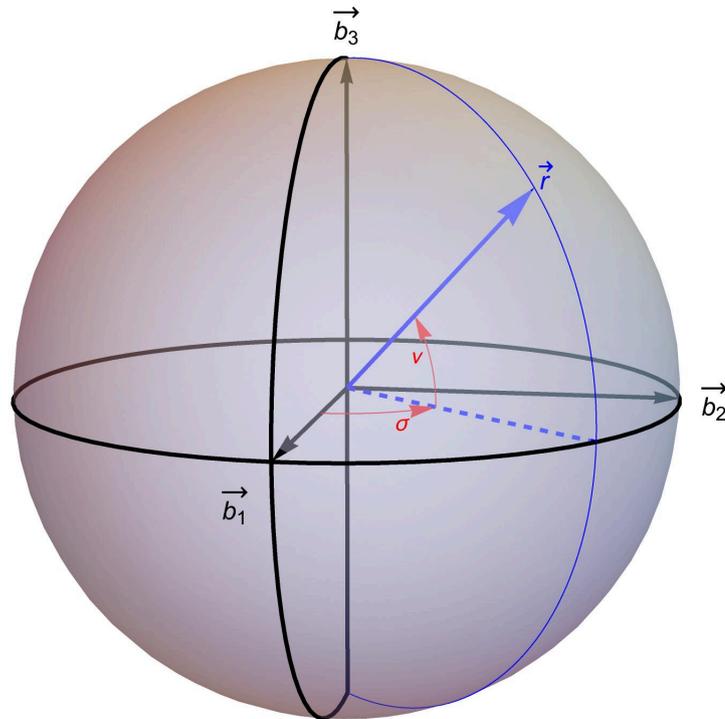
Das mathematische Werkzeug stellt die etablierte Vektorrechnung zur Verfügung.

- Die in der Sonnenuhrenlehre gebräuchlichere Methode verwendet die beiden Winkel σ und ν der Kugelkoordinaten eines Richtungsvektors \vec{r} . Die Winkel beziehen sich stets auf eine vorgegebene, orthogonale Basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Die von den ersten beiden Basisvektoren aufgespannte Ebene heißt in diesem Zusammenhang die *Bezugsebene*, der dritte Basisvektor der *Pol*. σ wird in der Bezugsebene, von \vec{b}_1 aus gemessen, wobei in kürzester Richtung nach \vec{b}_2 positiv gezählt wird. ν wird von der Bezugsebene aus in kürzester Richtung nach \vec{b}_3 positiv gemessen. In Analogie zur Terminologie in Fotografie und Film bezeichne ich im Folgenden σ anwendungsneutral als *Schwen-*

kungswinkel oder kurz *Schwenkung* und ν als die *Neigungswinkel* oder kurz *Neigung*. Beispiele sind Stundenwinkel τ (Schwenkung) und Deklination δ (Neigung) eines Gestirns oder geographische Länge λ (Schwenkung) und Breite φ (Neigung) eines Ortes auf der Erdoberfläche.

Um mit Richtungswinkeln zu arbeiten verwendet man den mathematischen Apparat der sphärischen Trigonometrie.

Abbildung 3. Ein Richtungsvektor und seine Richtungswinkel



Der Richtungsvektor \vec{r} (blau), seine Schwenkung σ und seine Neigung ν (rot)

Der Vorteil der ersten Methode ist ihre Anschaulichkeit. Für die zweite Methode spricht, dass die meisten mathematischen Programmen den bequemen und effizienten Formalismus der Vektorrechnung zur Verfügung stellen. Es macht daher Sinn, die Probleme mit Hilfe von Richtungswinkeln anschaulich zu beschreiben, die Richtungen anschliessend in Vektoren umzurechnen, mit dem Vektorkalkül zu lösen, und für eine allfällige Präsentation des Resultates die Vektoren wieder in Richtungswinkel zurück zu rechnen. Es ist also wichtig, effizient zwischen den beiden Methoden umrechnen zu können.

Umrechnung von Richtungswinkeln in einen Richtungsvektor. Die Komponenten des Einheitsvektors mit der Schwenkung σ und der Neigung ν bezüglich einer orthonormalen Basis sind

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos(\nu) \cos(\sigma) \\ \cos(\nu) \sin(\sigma) \\ \sin(\nu) \end{bmatrix} \quad (3)$$

—

Der umgekehrte Weg ist komplizierter.

Umrechnung eines Richtungsvektors in Richtungswinkel. Die Komponenten eines vom Nullvektor verschiedenen Vektors \vec{r} bezüglich einer orthonormalen Basis seien

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Dann kann man seine Richtungswinkel folgt bestimmen:

- Bestimmung von σ
 - Wenn $r_1 = 0$
 - Wenn $r_2 > 0$, dann $\sigma = 90^\circ$
 - Wenn $r_2 < 0$, dann $\sigma = -90^\circ$
 - Wenn $r_2 = 0$, dann ist σ nicht definiert, weil \vec{r} parallel zu 3. Koordinatenachse liegt.
 - Wenn $r_1 > 0$, dann $\sigma = \arctan\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
 - Wenn $r_1 < 0$, dann $\sigma = \arctan\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + 180^\circ$
- Bestimmung von v

$$v = \arcsin\left(\frac{r_3}{|r|}\right)$$

—

Die meisten Mathematikprogramme bieten aber Funktionen an, welche Richtungswinkel in Richtungsvektoren und umgekehrt effizient umrechnen (Umrechnung von kartesischen in polare Koordinaten und umgekehrt, in MATLAB beispielsweise `cart2sph` resp. `sph2cart`).

Beispiel. Welches sind die lokalen Äquatorkomponenten des Einheitsvektors in Richtung zur Sonne an einem Tag, an welchem deren Deklination $\delta = -15^\circ$ beträgt, um 16 Uhr wahrer Ortszeit?

Der Stundenwinkel zur wahren Ortszeit 16 Uhr beträgt $\tau = (16 - 12) \cdot 15^\circ = 60^\circ$. Der Vergleich mit Abbildung 3, „Ein Richtungsvektor und seine Richtungswinkel“ zeigt:

- Die xy-Ebene entspricht der lokale Äquatorebene,
- die xz-Ebene der Meridianebenen von Greenwich,
- die Schwenkung σ dem Stundenwinkel τ ,
- die Neigung σ der Deklination δ .

Die Äquatorkomponenten des Einheitsvektors in Richtung zur Sonne sind daher gemäss Gleichung 3

$$\begin{bmatrix} \cos(-15^\circ)\cos(60^\circ) \\ \cos(-15^\circ)\sin(60^\circ) \\ \sin(-15^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48296 \\ 0.83652 \\ -0.25882 \end{bmatrix}$$

—

Umgekehrt weist ein Vektor mit dem Äquatorkomponenten $[-2 \ 2 \ -1]^T$ in die Richtung mit der Deklination

$$\delta = \arcsin\left(\frac{-1}{3}\right) = -19.47^\circ$$

und dem Stundenwinkel

$$\tau = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right) + 180^\circ = 135^\circ$$

—

Vektorbasen für Sonnenuhranwendungen

Für die Berechnung von ebenen Sonnenuhren nach der hier beschriebenen Methode braucht man folgende Basen:

- Die Zifferblattbasis
- die lokale Horizontbasis
- die ortsfeste Äquatorbasis

Nur bei Sonnenuhren für mittlere Zeiten spielen auch

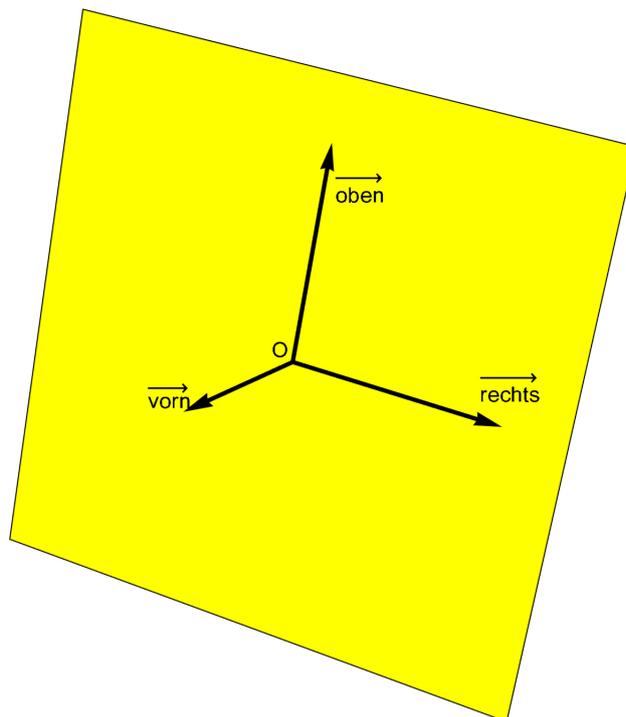
- die sternfeste Äquatorbasis
- sowie die Ekliptikbasis

eine Rolle. Diese Basen können bei Bedarf durch die Wahl eines geeigneten Ursprungs zu einem Koordinatensystem ergänzt werden.

Das Zifferblattkoordinatensystem

Das *Zifferblattkoordinatensystem* ist quasi unser Arbeitspferd.

Abbildung 4. Das Zifferblattkoordinatensystem auf einer geneigten Zifferblattebene



- Die *Zifferblattbasis* $Z = (\overrightarrow{\text{rechts}}, \overrightarrow{\text{oben}}, \overrightarrow{\text{vorn}})$ ist wie folgt definiert:

Alle Basisvektoren haben alle die Länge 1.

- a. Bei einem vertikalen oder geneigten Zifferblatt weist die Richtungsangabe $\overrightarrow{\text{rechts}}$ horizontal und parallel zur Zifferblattebene vom Betrachter aus gesehen nach rechts, $\overrightarrow{\text{oben}}$ zeigt parallel zur

Falllinie der Ebene nach oben, und \vec{vorn} steht senkrecht auf der Zifferblattebene und weist auf die Seite des Beobachters hin.

- b. Bei einem horizontalen Zifferblatt stellen wir uns vor, dass wir von Süden her auf das Zifferblatt blicken. Wir bezeichnen daher die Richtung nach Osten als \vec{rechts} , jene nach Norden als \vec{oben} und die Richtung zum Zenit als \vec{vorn} .

Die Zifferblattbasis bildet ein *orthonormales Rechtssystem*.

Gelegentlich, vor allem beim Zeichnen eines Zifferblattes, verwenden wir auch eine 2-dimensionale Zifferblattbasis bestehen aus den ersten beiden Basisvektoren \vec{rechts} und \vec{oben} .

- Durch die Wahl eines *Ursprungs* ergänzt man die Basis zu einem Koordinatensystem. Der Ursprung kann im Prinzip frei gewählt werden, doch wählt man aus praktischen Gründen fast immer einen Punkt auf dem Zifferblatt, typischerweise den Fusspunkt des Gnomons.

Die Horizontbasis

Dieses kommt zu Zug, wenn wir die Vektoren auf unserer lokalen Umgebung beziehen wollen. Ein Beispiel sind die beiden Winkel D und I , welche die Schwenkung des Zifferblattes gegenüber der Südrichtung und die Neigung gegenüber der Vertikalen beschreiben: Sie beziehen sich auf unsere gewohnten Himmelsrichtungen.

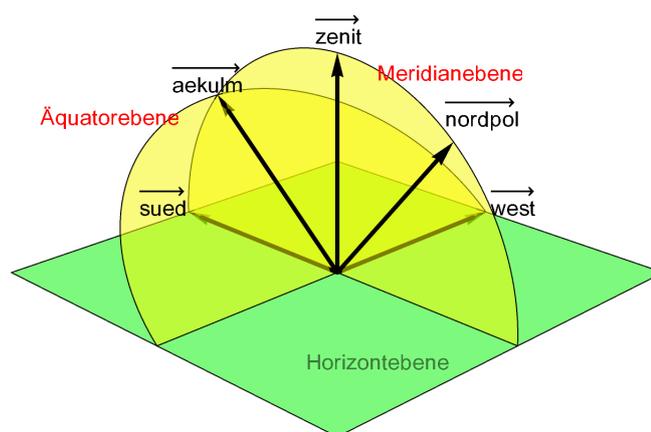
Die *Horizontbasis* $H = [\vec{sued}, \vec{west}, \vec{zenit}]$

Sie ist wie folgt definiert: Wie der Name erraten lässt, ist die Bezugsebene die Horizontebene. Der erste Basisvektor weist nach Süden, der zweite nach Westen und der dritte vertikal nach oben. Alle drei Basisvektoren sollen die Länge 1 haben. H ist damit eine linksorientierte Orthonormalbasis.

Der Schwenkungswinkel eines Vektors in der Horizontbasis heisst *Azimut* a und der Neigungswinkel *Höhenwinkel* oder kurz *Höhe* h

Die ortsfeste Himmelsäquatorbasis

Abbildung 5. Die Horizontbasis und die Äquatorbasis



Die Richtung zur Sonne ist in der Regel durch ihre *Deklination* δ und ihren *Stundenwinkel* τ gegeben. Das sind die beiden Richtungswinkel bezüglich der *ortsfesten Äquatorbasis* $A = [\vec{aekulm}, \vec{west}, \vec{nordpol}]$. Bezugsebene ist die lokale Himmelsäquatorebene, das ist die Ebene, welche parallel zur Erdäquatorebene durch den Standort verläuft. Die Basisvektoren sind wie folgt definiert: \vec{aekulm} weist zum Kulminationspunkt auf dem Himmelsäquator, ist also parallel zur Schnittgera-

den der lokalen Himmelsäquatorebene mit der lokalen Meridianebene und weist auf die südliche Seite. Den zweiten Basisvektor \vec{w}_2 teilt das Äquatorsystem mit dem Horizontsystem. $\vec{nordpol}$ schliesslich weist zum Himmelsnordpol. Alle drei Basisvektoren haben die Länge 1. Damit stellt auch das ortsfeste Himmelsäquatorsystem eine linksorientierte Orthonormalbasis dar.

Das ortsfeste Himmelsäquatorsystem spielt für unsere Zwecke die wichtigere Rolle als das im nächsten Abschnitt beschriebene sternfeste. Wenn daher im Folgenden einfach von der Äquatorbasis oder vom Äquatorsystem die Rede ist, ist stets das ortsfeste gemeint.

Die sternfeste Himmeläquatorbasis

Die sternfeste Himmelsäquatorbasis ist nur für die Berechnung von Sonnenuhren für die mittlere Zeit relevant. Wer sich nicht für solche interessiert, kann diesen und den folgenden Abschnitt über das Ekliptiksystem ohne Verlust überspringen.

Wie der Name vermuten lässt, benützt auch die *sternfeste*, auch *rotierende* genannte *Himmelsäquatorbasis* $A_S = [\vec{a}_{S1}, \vec{a}_{S2}, \vec{a}_{S3}]$ die Himmeläquatorebene als Bezugsebene. Der erste Basisvektor \vec{a}_{S1} des sternfesten Systems ist der Einheitsvektor in Richtung zum Frühlingspunkt, der zweite \vec{a}_{S2} , ebenfalls ein Einheitsvektor, liegt in der Äquatorebene rechthändig senkrecht zum ersten. Der dritte schliesslich fällt mit dem dritten Basisvektor des ortsfesten Äquatorsystems zusammen, $\vec{a}_{S3} = \vec{nordpol}$. Damit stellt das sternfeste Himmelsäquatorsystem eine rechtsorientierte Orthonormalbasis dar.

Der Schwenkungswinkel eines Vektors im sternfesten Himmelsäquatorsystem ist die *Rektaszension* α . Der Neigungswinkel, die *Deklination* δ , ist identisch mit jenem im ortsfeste Äquatorsystem.

Die Ekliptikkoordinatensysteme

Die Ekliptikebene ist die Ebene, in welcher die Erde ihre Bahn um die Sonne zieht. Sie dient als Bezugsebene der *Ekliptikbasis* $E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, welche eine rechtsorientierte Orthonormalbasis ist. Der erste Basisvektor \vec{e}_1 zeigt vom Sonnenzentrum in Richtung zum Frühlingspunkt, der zweite \vec{e}_2 liegt in der Ekliptikebene und steht senkrecht zum ersten und zeigt auf die Seite zunehmender Umlaufrichtung der Erde. \vec{e}_3 schliesslich steht senkrecht zu \vec{e}_1 und \vec{e}_2 bildet mit ihnen ein Rechtssystem.

Der Schwenkungswinkel eines Vektors in der frühlingspunktbezogenen Basis heisst die *ekliptikale Länge* und wird mit l bezeichnet. Die Neigung heisst die *ekliptikale Breite* B . Für unsere Überlegungen ist stets $B = 0$, weil wir uns nicht für Himmelskörper ausserhalb der Erdbahnebene interessieren.

In gewissen Betrachtungen spielt auch der Winkel zwischen der Richtung von der Sonne zum Perihel und der Richtung von der Sonne zur Erde eine Rolle. Dieser heisst die (wahre) *Anomalie* der Erde. Die Lage des Perihels relativ zum Frühlingspunkt ist zeitlich nicht ganz konstant. Seine ekliptikale Länge A_p betrug im Jahr 2000 etwa 102.9373° , und sie wächst pro Jahr um ca. eine Winkelminute, im Jahr J beträgt sie daher etwa

$$A_p \approx 102.9373^\circ + (J - 2000) \cdot 0.0172^\circ \quad (4)$$

Basistransformationen

Man kann die Komponenten bezüglich verschiedenen Basen durch Multiplikation mit einer Matrix umrechnen. Seien A und B zwei Basen. Der Vektor \vec{v} habe die Komponenten $\vec{v}|_A$ bezüglich A und die Komponenten $\vec{v}|_B$ bezüglich B .

Dann gibt es eine Matrix T_{AB} , sodass

$$\vec{v}|_B = T_{AB} \cdot \vec{v}|_A \quad (5)$$

gilt. Die Spalten dieser Transformationsmatrix T_{AB} sind dabei die Darstellungen der Basisvektoren von A in Komponenten bezüglich der Basis B . Wenn also die Basisvektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_3 von A bezüglich der Basis B die Komponenten

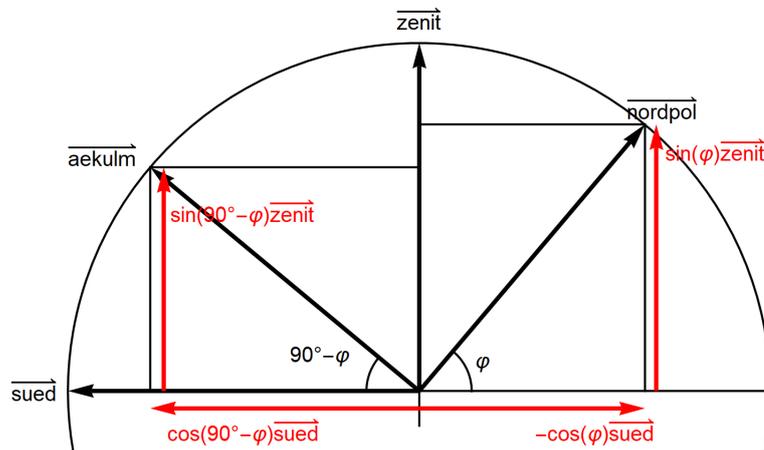
$$\vec{a}_1|_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}_B, \vec{a}_2|_B = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}_B \text{ und } \vec{a}_3|_B = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}_B$$

haben, so lautet die Transformationsmatrix

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Umrechnung zwischen Äquator- und der Horizontkomponenten

Die Spalten der Matrix für die Umrechnung von ortsfesten Äquator- in Horizontkoordinaten sind also die Darstellungen der Basisvektoren des Äquatorsystems $A = [\vec{aekulm}, \vec{west}, \vec{nordpol}]$ in Komponente des Horizontsystems $H = [\vec{sued}, \vec{west}, \vec{zenit}]$. Diese sind von der geografischen Breite φ des Standortes abhängig.



Gemäss obiger Skizze gilt

$$\vec{aekulm} = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \vec{sued} + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \vec{zenit}$$

$$= \sin(\varphi) \cdot \vec{sued} + \cos(\varphi) \cdot \vec{zenit}$$

oder in Kurzschreibweise

$$\vec{aekulm} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}_H$$

Das ist also die erste Spalte der Transformationsmatrix. Den Vektor \vec{west} teilen die beiden Basen, und in beiden Basen ist er der zweite Vektor, daher hat er auch in beiden Systemen dieselbe Komponentendarstellung

$$\vec{west} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_H$$

welche also die zweite Spalte der Matrix ist. Schliesslich ist

$$\vec{\text{nordpol}} = -\cos(\varphi) \cdot \vec{\text{sued}} + \sin(\varphi) \cdot \vec{\text{zenit}}$$

und damit die dritte Spalte

$$\vec{\text{nordpol}} = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_H$$

Die Transformationsmatrix lautet also

$$T_{AH}(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & 0 & -\cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Die Matrix $T_{AH}(\varphi)$ enthält die notwendige Information über den Standort der Sonnenuhr. Ich bezeichne sie daher im Folgenden als *Standortmatrix*.

Die Standortmatrix ist orthonormal, weshalb die Umkehrtransformation von Horizont- in Äquator-komponenten mittels der transponierten Matrix erfolgt.

$$T_{HA}(\varphi) = T_{AH}(\varphi)^T = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Beispiel. Welches sind die Horizontkomponenten der Sonnenrichtung an einem Tag, an welchem deren Deklination -15° beträgt, um 16 Uhr wahrer Ortszeit in Luzern mit der geographischen Breite 47° ?

Die Äquatorkomponenten des Einheitsvektors in Richtung zur Sonne haben wir bereits im Beispiel im „Richtungswinkel und Richtungsvektoren“ bestimmt:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0.48296 \\ 0.83652 \\ -0.25882 \end{bmatrix}_A$$

Die Standortmatrix lautet

$$T_{AH}(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin(47^\circ) & 0 & -\cos(47^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(47^\circ) & 0 & \sin(47^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.73135 & 0 & -0.68200 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \end{bmatrix}$$

Die Horizontkomponenten sind somit

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0.73135 & 0 & -0.68200 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.48296 \\ 0.83652 \\ -0.25882 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.52973 \\ 0.83652 \\ 0.14009 \end{bmatrix}_H$$

—

Umrechnung zwischen Horizont- und Zifferblattkomponenten

Die Matrix für die Transformation von Horizont- in Zifferblattkoordinaten ist von der räumlichen Orientierung des Zifferblattes abhängig.

A. Für ein *horizontales Zifferblatt* ist die Sache einfach. Der 1. Basisvektor des Horizontsystems $\vec{\text{sued}}$ ist dem 2. Zifferblattvektor $\vec{\text{oben}}$ entgegengesetzt, es gilt also $\vec{\text{sued}} = -\vec{\text{oben}}$. Somit

$$\vec{\text{sued}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_Z$$

Der 2. Basisvektor des Horizontsystems $\vec{\text{west}}$ ist dem 1. Zifferblattvektor $\vec{\text{rechts}}$ entgegengesetzt.

$$\vec{\text{west}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_Z$$

Der 3. Basisvektor des Horizontsystems $\vec{\text{zenit}}$ ist identisch mit dem 3. Zifferblattvektor $\vec{\text{vorn}}$. Die Zifferblattkomponenten von $\vec{\text{zenit}}$ sind daher

$$\vec{\text{zenit}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_Z$$

Das sind die Spalten der Transformationsmatrix von Komponenten des Horizontsystems in solche des horizontalen Zifferblattsystems

$$T_{HZ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

B. Für die Herleitung der Transformationsmatrix eines abweichenden und allenfalls zusätzlich geneigten Zifferblattes gehen wir schrittweise vor:

a. In einem *vertikalen Südzipferblatt* ist der erste Basisvektor $\vec{\text{sued}}$ des Horizontsystems identisch mit dem Zifferblatt-Basisvektor $\vec{\text{vorn}}$. Letztere ist der dritte Basisvektor des Zifferblattsystems.

$$\vec{\text{sued}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_Z$$

Dies ist also die erste Spalte der Transformationsmatrix. Die zweite erhält man, indem man den 2. Basisvektor $\vec{\text{west}}$ der Horizontbasis durch Zifferblattkomponenten ausdrückt. Nun weist $\vec{\text{west}}$ bei einem vertikalen Südzipferblatt nach links, also in die Richtung $-\vec{\text{rechts}}$, und $\vec{\text{rechts}}$ ist der 1. Basisvektor des Zifferblattsystems.

$$\vec{\text{west}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_Z$$

Der dritte Horizontbasisvektor $\vec{\text{zenit}}$ schliesslich ist identisch mit $\vec{\text{oben}}$, dem zweiten Vektor der Zifferblattbasis. Die dritte Spalte der Transformationsmatrix ist also

$$\vec{\text{zenit}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_Z$$

Damit lautet die Transformationsmatrix von Horizontkomponenten in Komponenten eines vertikalen Südzipferblattes

$$T_{HZ}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

b. Bei einem *vertikalen, aus der Südrichtung abweichenden* Zifferblatt muss das vertikale Südzipferblatt noch um den Deklinationswinkel D um einer vertikale Achse geschwenkt werden. Das bedeutet, dass die Transformationsmatrix von Punkt 1 noch mit der entsprechenden Drehmatrix vormultipliziert werden muss. Deren Spalten sind die Basisvektoren des vertikalen Südzipferblattes ausgedrückt in Komponenten des geschwenkten Zifferblattes

$$T_{HZ}(D, 0) = \begin{bmatrix} \cos(D) & 0 & \sin(D) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(D) & 0 & \cos(D) \end{bmatrix} \cdot T_{HZ}(0, 0) \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(D) & -\cos(D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(D) & \sin(D) & 0 \end{bmatrix}$$

- c. Im allgemeinsten Falle, wenn das *Zifferblatt geneigt* ist, muss das vertikale Zifferblatt noch um den Inklinationswinkel I um die horizontale Achse des Zifferblattes geneigt werden. Das bedeutet, dass die Matrix von Punkt 2 nochmals mit einer entsprechenden Drehmatrix vormultipliziert werden muss.

$$T_{HZ}(D, I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(I) & -\sin(I) \\ 0 & \sin(I) & \cos(I) \end{bmatrix} \cdot T_{HZ}(D, 0)$$

Daraus

$$T_{HZ}(D, I) = \begin{bmatrix} \sin(D) & -\cos(D) & 0 \\ -\cos(D)\sin(I) & -\sin(D)\sin(I) & \cos(I) \\ \cos(D)\cos(I) & \sin(D)\cos(I) & \sin(I) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Die Matrix T_{HZ} enthält die Information über die räumliche Orientierung des Zifferblattes. Ich nenne sie daher die *Orientierungsmatrix*.

Auch die Orientierungsmatrix ist orthonormal, weshalb die Umkehrtransformation von Zifferblatt- in Horizontkomponenten mittels der transponierten Matrix erfolgt.

$$T_{ZH}(D, I) = T_{HZ}(D, I)^T \quad (13)$$

Beispiel. Welches sind die Zifferblattkomponenten der Sonnenrichtung an einem Tag, an welchem deren Deklination -15° beträgt, um 16 Uhr wahrer Ortszeit in Luzern mit der geographischen Breite 47° , an einem vertikalen Zifferblatt, das um 20° nach Osten abweicht?

Die Horizontkomponente dieses Vektors haben wir im letzten Beispiel berechnet.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0.52973 \\ 0.83652 \\ 0.14009 \end{bmatrix}_H$$

Die Orientierungsmatrix lautet gemäss Gleichung 11

$$T_{HZ}(-20^\circ, 0) = \begin{bmatrix} \sin(-20^\circ) & -\cos(-20^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(-20^\circ) & \sin(-20^\circ) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.34202 & -0.93969 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.93969 & -0.34202 & 0 \end{bmatrix}$$

Damit sind die Zifferblattkomponenten

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -0.34202 & -0.93969 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.93969 & -0.34202 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.52973 \\ 0.83652 \\ 0.14009 \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} -0.96725 \\ 0.14009 \\ 0.21168 \end{bmatrix}_Z$$

Direkte Umrechnung zwischen Äquator- und Zifferblattkomponenten

Wenn Vektoren, die in Äquatorkomponenten gegeben sind, in Zifferblattkomponenten umzurechnen sind, kann man, wie in den letzten Beispielen gezeigt, zweistufig vorgehen: Man rechnet zuerst die Äquator- in Horizontkomponenten und diese anschließen in Zifferblattkomponenten um. Man kann nun die beiden Basistransformationen aber auch zusammenfassen und mit einer einzigen Matrix Äquatorkomponenten direkt in Zifferblattkomponenten transformieren. Die entsprechende Matrix ist das Produkt der Standortmatrix mit der Orientierungsmatrix (man beachte die Reihenfolge!).

$$T_{AZ}(\varphi, D, I) = T_{HZ}(D, I) \cdot T_{AH}(\varphi) \quad (14)$$

Diese Matrix beschreibt den Standort und die Ausrichtung der Sonnenuhr vollständig. Ich nenne sie daher die *Sonnenuhrmatrix*. Im häufigen Spezialfall eines vertikalen Zifferblattes mit $I = 0$ wird sie ziemlich einfach

$$T_{AZ}(\varphi, D, 0) = \begin{bmatrix} \sin(D)\sin(\varphi) & -\cos(D) & -\sin(D)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ \cos(D)\sin(\varphi) & \sin(D) & -\cos(D)\cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die Matrix für das horizontale Zifferblatt mit $D = 0$ und $I = 90^\circ$ ist noch einfacher

$$T_{AZ}(\varphi, 0, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Aus der Theorie der Matrizenrechnung ist bekannt, dass das Produkt orthonormaler Matrizen wieder orthonormal ist, weshalb auch die Umkehrtransformation von Zifferblatt- in Äquatorkomponenten mittels der transponierten Matrix erfolgen kann.

$$T_{ZA}(\varphi, D, I) = T_{AZ}(\varphi, D, I)^T \quad (17)$$

Beispiel. Wir rechnen nun die Zifferblattkomponenten des Vektors im letzten Beispiel wieder in Äquatorkomponenten zurück.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -0.96725 \\ 0.14009 \\ 0.21168 \end{bmatrix}_Z$$

Mit $\varphi = 47^\circ$ und $D = -20^\circ$ liefert die Gleichung 15 die Sonnenuhrmatrix

$$T_{AZ}(47^\circ, -20^\circ, 0) = \begin{bmatrix} -0.25014 & -0.93969 & 0.23325 \\ 0.682 & 0 & 0.73135 \\ 0.68724 & -0.34202 & -0.64087 \end{bmatrix}$$

Die Rücktransformation von Zifferblatt- in Äquatorkomponenten vermittelt die transponierte Matrix

$$T_{ZA}(47^\circ, -20^\circ, 0) = \begin{bmatrix} -0.25014 & 0.682 & 0.68724 \\ -0.93969 & 0 & -0.34202 \\ 0.23325 & 0.73135 & -0.64087 \end{bmatrix}$$

Mit ihrer Hilfe berechnen wir die Äquatorkomponenten des Vektors

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -0.25014 & 0.682 & 0.68724 \\ -0.93969 & 0 & -0.34202 \\ 0.23325 & 0.73135 & -0.64087 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.96725 \\ 0.14009 \\ 0.21168 \end{bmatrix}_Z = \begin{bmatrix} 0.48296 \\ 0.83652 \\ -0.25882 \end{bmatrix}_A$$

Der Vergleich mit dem Ausgangsvektor im Beispiel von „Umrechnung zwischen Äquator- und der Horizontkomponenten“ bestätigt die Rechnung.

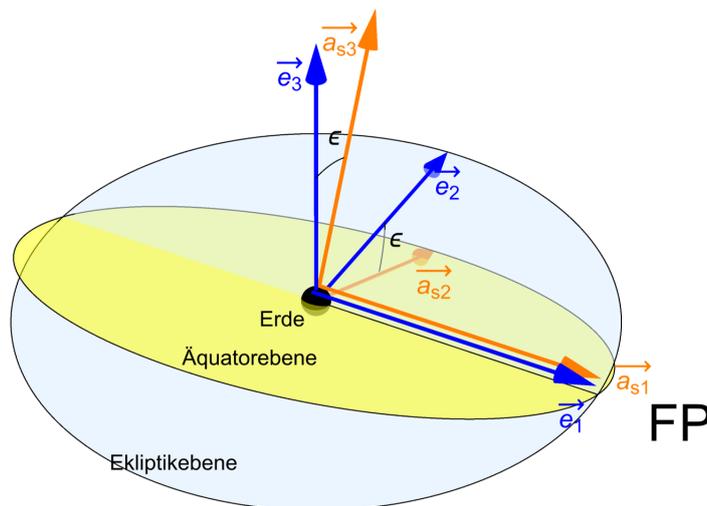
Umrechnung zwischen dem Ekliptiksystem und dem sternfesten Äquatorsystem

Dieser Abschnitt ist nur für die Berechnung von Sonnenuhren für die mittlere Zeit relevant. Wer sich nicht für solche interessiert, kann diesen und den nächsten Abschnitt ohne Verlust überspringen.

Die Himmelsäquatorebene schneidet die Ekliptikebene in der Äquinoktialgeraden unter dem Winkel ϵ , der sogenannten Ekliptikschiefe. Diese hat derzeit den Wert 23.44° , nimmt jedoch aktuell in 100 Jahren um rund $50''$ ab.

Die Ekliptikbasis sei $E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ und die sternfeste Himmelsäquatorbasis $A_s = [\vec{a}_{s1}, \vec{a}_{s2}, \vec{a}_{s3}]$, wie im folgenden Bild gezeigt. Beide sind orthonormal und rechtsorientiert

Abbildung 6. Die Ekliptikbasis und die sternfeste Äquatorbasis



FP bedeutet die Richtung zum Frühlingspunkt.

$E = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ ist die Ekliptikbasis, $A_s = [\vec{a}_{s1}, \vec{a}_{s2}, \vec{a}_{s3}]$ die sternfeste Äquatorbasis.

Wie aus der Graphik ersichtlich, sind die Basisvektoren von E bezüglich der Basis A_s wie folgt darstellbar:

$$\vec{e}_1 = \vec{a}_{s1}, \vec{e}_2 = \vec{a}_{s2} \cdot \cos(\epsilon) + \vec{a}_{s3} \cdot \sin(\epsilon), \vec{e}_3 = \vec{a}_{s2} \cdot \sin(\epsilon) - \vec{a}_{s3} \cdot \cos(\epsilon)$$

Für die Komponenten gilt somit

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{A_s}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\epsilon) \\ \sin(\epsilon) \end{bmatrix}_{A_s}, \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\epsilon) \\ \cos(\epsilon) \end{bmatrix}_{A_s}$$

Die Transformationsmatrix von Ekliptik- in sternfeste Äquatorkomponenten daher

$$T_{EA_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (18)$$

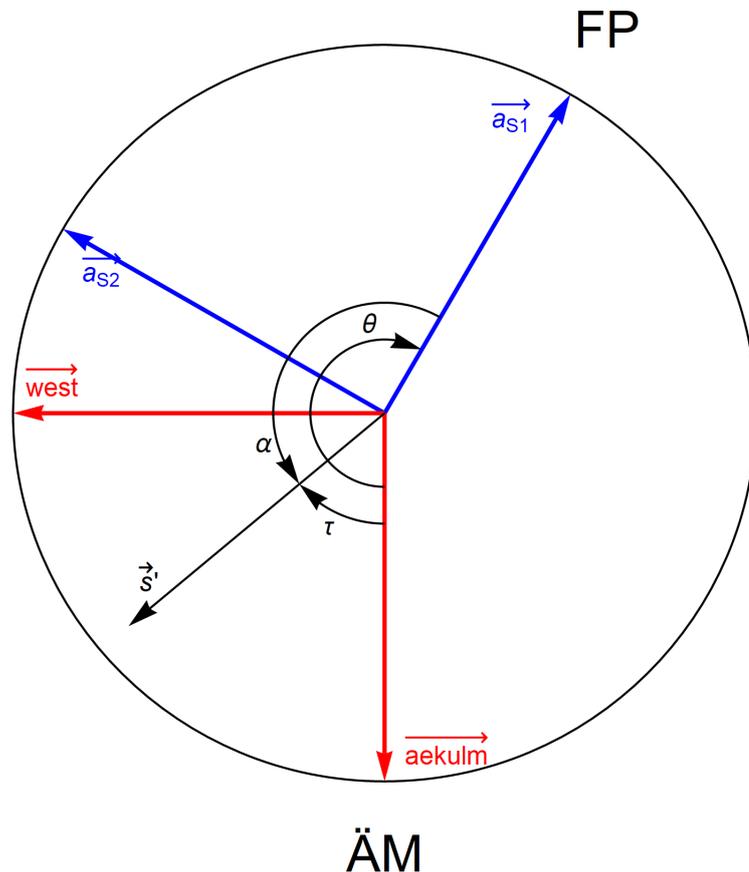
und weil die Matrix orthonormal ist, ist die Matrix für die Rücktransformation die Transponierte

$$T_{A_sE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & \sin(\varepsilon) \\ 0 & -\sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Umrechnung zwischen dem sternfesten und dem ortsfesten Äquatormsystem

Dieser Abschnitt ist nur für die Berechnung von Sonnenuhren für die mittlere Zeit relevant. Die beiden Äquatormsysteme präsentieren sich wie folgt.

Abbildung 7. Die beiden Basen in der Himmelsäquatormebene



FP bedeutet die Richtung zum Frühlingpunkt, ÄM die Richtung der Schnittgeraden des Himmelsäquatorms mit der Ebene des Ortsmeridians, \vec{s} ist die senkrechte Projektion der Sonnenrichtung auf die Äquatormebene.

$A_s = [\vec{a}_{s1}, \vec{a}_{s2}, \vec{a}_{s3}]$ ist die sternfeste Basis, $A = [\vec{aekulm}, \vec{west}, \vec{nordpol}]$ die ortsfeste. $\vec{a}_{s3} = \vec{nordpol}$ steht senkrecht zur Zeichenebene (= Äquatormebene) gegen den Betrachter gerichtet.

Die Sternzeit θ ist der Stundenwinkel des Frühlingpunktes.

Die Vektoren der sternfesten Basis $A_s = [\vec{a}_{s1}, \vec{a}_{s2}, \vec{a}_{s3}]$ lauten in Komponenten der ortsfesten Äquatorbasis $A = [\vec{aekulm}, \vec{a}west, \vec{a}nordpol]$

$$\vec{a}_{s1} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \\ 0 \end{bmatrix}_A, \vec{a}_{s2} = \begin{bmatrix} \sin(\Theta) \\ -\cos(\Theta) \\ 0 \end{bmatrix}_A, \vec{a}_{s3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A$$

Damit lautet die Matrix, mit welcher man sternfeste in ortsfeste Äquatorkomponenten umrechnen kann

$$T_{A_s A}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ \sin(\Theta) & -\cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

wobei die Sternzeit gleich der Summe der Rektaszension α und des Stundewinkels τ der betrachteten Richtung ist.

$$\Theta = \alpha + \tau \quad (21)$$

In die obige Transformationmatrix eingesetzt, erhält man nach Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme

$$T_{A_s A}(\Theta) = T_{A_s A}(\alpha + \tau) \quad (22)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\tau) - \sin(\alpha)\sin(\tau) & \sin(\alpha)\cos(\tau) + \cos(\alpha)\sin(\tau) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\tau) + \cos(\alpha)\sin(\tau) & -\cos(\alpha)\cos(\tau) + \sin(\alpha)\sin(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix lässt sich in zwei Faktoren zerlegen, von denen einer nur die Rektaszension und der andere nur den Stundenwinkel enthält. Dabei gibt es zwei Varianten, die sich durch die Reihenfolge von Rektaszension und Stundenwinkel unterscheiden.

$$1. T_{A_s A}(\Theta) = T_{BA}(\alpha) \cdot T_{A_s B}(\tau) \quad (23)$$

wobei

$$T_{BA}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

und

$$T_{A_s B}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau) & \sin(\tau) & 0 \\ -\sin(\tau) & \cos(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

ist.

$$2. T_{A_s A}(\Theta) = T_{CA}(\tau) \cdot T_{A_s C}(\alpha) \quad (26)$$

wobei

$$T_{CA}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) & 0 \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

und

$$T_{A_S C}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

ist.

Eine solche Zerlegung kann sinnreich sein, weil die Rektaszension die Jahreszeit und der Stundenwinkel die Tageszeit repräsentiert. Wenn man nun, z.B. um eine Zeitgleichungsschleife zu berechnen, für einen festen Stundenwinkel viele Punkte mit unterschiedlichen Rektaszensionen berechnen muss, so ist die 1. Form vorteilhaft, denn man kann dann die sternfesten Äquatorkomponenten eines Richtungsvektors mittels $T_{A_S B}(\tau)$ einmalig in eine Zwischenbasis B umrechnen und anschliessend dieses Zwischenresultat für beliebig viele Rektaszensionen mit Hilfe von $T_{B A}(\alpha)$ in ortsfeste Äquatorkomponenten verwandeln. Entsprechend ist die Version 2 vorteilhaft, wenn man viele Richtungen mit fester Rektaszension und unterschiedlichen Stundenwinkeln transformieren will.

Weil die Transformationsmatrix orthonormal und symmetrisch ist, ist sie identisch mit ihrer Inversen und kann daher auch für die Rücktransformation benützt werden.

$$T_{A_S A}(\Theta) = T_{A_S A}(\Theta) \quad (29)$$

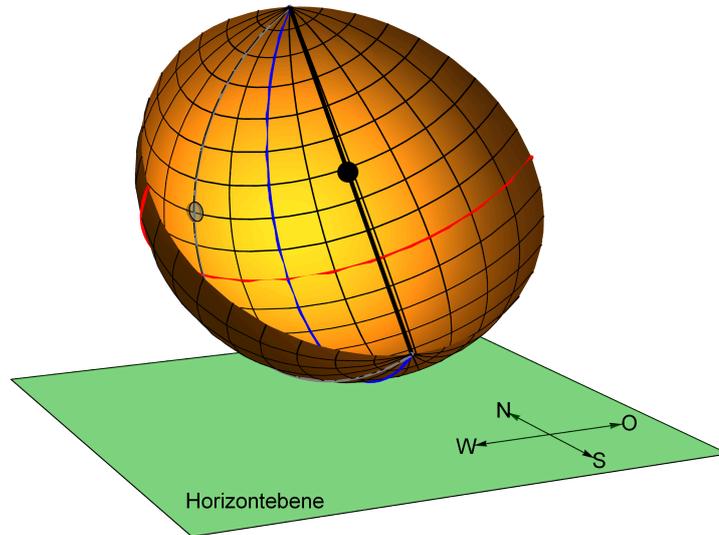
Messung von Deklination und Stundenwinkel der Sonne

Sonnenuhren, welche die Zeit mit dem Schatten eines erdachsenparallelen Stabes, eines sogenannten *Postabes*, anzeigen, stellen immer die wahre, astronomische Sonnenzeit dar. In der Regel ist das die wahre Orstzeit des Standortes, was aber nicht zwingend ist, denn man kann auch Stundenlinien für die wahre Ortszeit eines anderen Ortes, zum Beispiel für jene des Referenzmeridians der Zeitzone, darstellen. Von dieser Möglichkeit wurde nach Einführung der Zeitzonen (in der Schweiz 1894) oft Gebrauch gemacht, weil die Zeit des 15. Längengrades die Referenzzeit der mitteleuropäische Zeit ist. Damit konnte die Abweichung der von der Sonnenuhr angezeigten Zeit gegenüber der Mitteleuropäischen Normalzeit auf den Effekt der Zeitgleichung von rund plus oder minus einer Viertelstunde reduziert werden.

Mit einem Polstab misst man im Prinzip den Drehwinkel der Erde um ihre Polachse, oder geozentrisch ausgedrückt, den Stundenwinkel der Sonne unabhängig von der Sonnendeklination. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass man mit einem Polstab die Deklination der Sonne nicht erfassen kann. Wenn man also Informationen gewinnen will, welche auch von der Jahreszeit abhängig sind, wie etwa den Eintritt der Sonne in ein neues Tierkreiszeichen, oder die Zeitpunkte des Sonnenaufgangs und des -untergangs, braucht man eine Messeinrichtung, mit der man neben dem Stundenwinkel auch die Deklination der Sonne erfassen kann.

Das Prinzip der gleichzeitigen Messung von Deklination und Stundenwinkel der Sonne war schon den alten Griechen bekannt: Laut dem römischen Architekturtheoretiker Vitruv soll Aristarch von Samos im 3. Jahrhundert v. Chr. die sogenannten *Skaphe* erfunden haben, eine halbe Hohlkugel, in deren Zentrum sich ein punktförmiger Schattenwerfer befindet. Für die folgenden Überlegungen stellen wir uns vor, dieser sei eine kleine, auf einem dünnen Stab montierte, kugelförmige Perle. Der Stab wird, wie in der folgenden Figur gezeigt, so montiert, dass er einen Durchmesser der Hohlkugel bildet. Die Vorrichtung wird dann so aufgestellt, dass der Stab parallel zur Erdachse verläuft und die Öffnung der Hohlkugel nach Süden ausgerichtet ist. Die Aufliegpunkte des Stabes auf der Halbkugel nennen wir die *Pole* und den Stab selber den *Polstab* der Skaphe.

Abbildung 8. Modell einer Skaphe zur Messung von Deklination und Stundenwinkel der Sonne



Der Stab ist parallel zur Erdachse und die Öffnung der Halbkugel ist nach Süden ausgerichtet.

Nun kann man anhand des Schattens der Perle auf einer Skala auf der Innenseite der Skaphe den Stundenwinkel und die Deklination der Sonne ablesen. Dabei handelt es sich mathematisch betrachtet um eine Zentralprojektion mit der Perle als Zentrum. Die Bilder des Stundenwinkel- und Deklinationssnetzes an der Himmelsphäre ergeben auf der Skaphe die Messskala. Die Skalenlinien für die Stundenwinkel sind halbe Grosskreise, welche durch die Skaphenpole verlaufen, die Skalenlinien für die Deklination sind Halbkreise in Ebenen, welche senkrecht zum Polstab stehen und deren Zentrum auf dem Polstab liegt. Man kann nun die Skalenlinien für den Stundenwinkel natürlich auch direkt mit der entsprechenden wahren Ortszeit beschriften, womit eine Sonnenuhr entsteht. Deklinationen sind im Prinzip Datumslinien, wobei bekanntlich zu jeder Deklination, mit Ausnahme jener der beiden Sonnwenden, stets zwei Tage im Jahr gehören, einer im Frühlingshalbjahr zwischen Wintersonnenwende und Sommersonnenwende und eine im Herbsthalbjahr.

Statt der Hohlkugel kann auch eine andere Fläche als Zifferblatt dienen. Wenn sich diese analytisch darstellen lässt, so kann man die Gleichungen für die Position des Schattens formulieren. Ausser bei Ebenen führt das jedoch zu nichtlinearen Problemen, welche, von Sonderfällen abgesehen, meist nur numerisch gelöst werden können. Im Rahmen dieser Abhandlung beschränke ich mich auf ebene Zifferblätter.

Ferner können auch andere punktförmige Zeigeeinrichtungen eingesetzt werden, und es ist auch nicht nötig, dass letztere einem Polstab aufgesetzt werden. Bei historischen Sonnenuhren für italienische Städte übernimmt meistens einfach die Spitze eines irgendwie montierten Stabes diese Funktion. Häufig wird auch eine Lochblende verwendet, welche einen Lichtfleck in einem Schattenfeld auf das Zifferblatt wirft.

Abbildung 9. Zeiger als Lochblende in Sonnenform

Ausschnitt aus der Wandsonnenuhr am Altersheim Erlen in Engelberg. Berechnung P. Bonaventura Thürlemann, Kloster Engelberg, künstlerische Gestaltung José de Nève, Stans

Ich werde im Folgenden alle als punktförmig gedachten Schatten- oder Lichtpunktwerfer pauschal als *Gnomon* bezeichnen.¹

Der Schatten des Gnomons

Die allgemeine Schattenformel

Sei \vec{g} der Ortsvektor des Gnomons, also zum Beispiel des Zentrums einer kleinen schattenwerfenden Kugel. Des Weiteren sei \vec{s} der Einheitsvektor, der in die Richtung zur Sonne weist. Die auf die Erde einfallenden Sonnenstrahlen haben die zur Sonnenrichtung entgegengesetzt Richtung $-\vec{s}$. Der Gnomonschatten U entsteht dort, wo der Sonnenstrahl, der durch die Position des Gnomons verläuft, auf die Zifferblattebene trifft. Diesen Gedankengang kann man direkt mit Vektoren formulieren. Dabei ist es fruchtbar, Vektoren als Verschiebungen oder Bewegungen zu sehen.²

Ein den Ortsvektor \vec{u} repräsentierender Pfeil zeigt vom Ursprung zum Gnomonschatten U . Um vom Ursprung aus zum Schattenpunkt auf dem Zifferblatt zu gelangen, kann man aber auch den Umweg über den Gnomon machen: Man fährt zuerst vom Ursprung zum Gnomon und danach um eine vorerst noch unbekannte Strecke t in der Richtung der Sonnenstrahlen, bis die Zifferblattebene erreicht ist. \vec{u} kann man also als $\vec{u} = \vec{g} + t \cdot (-\vec{s})$ darstellen oder

$$\vec{u} = \vec{g} - t \cdot \vec{s} \quad (30)$$

für ein vorerst unbekanntes $t > 0$.

Weil nun U in der Zifferblattebene liegt, ist \vec{u} parallel zur Zifferblattebene. Nun steht jeder Vektor, dessen Richtung parallel zu Zifferblattebene ist, senkrecht zu deren Normalenvektor, weshalb ihr Skalarprodukt verschwindet, also $\vec{u} \cdot \vec{\text{norm}} = 0$. Gestützt auf Gleichung 30 heisst das dann

$$(\vec{g} - t \cdot \vec{s}) \cdot \vec{\text{norm}} = 0$$

woraus man t berechnen kann,

$$t = \frac{\vec{g} \cdot \vec{\text{norm}}}{\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}}}$$

falls der Nenner nicht Null ist. Sollte aber $\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}} = 0$ sein, würde das bedeuten, dass \vec{s} und $\vec{\text{norm}}$ gegenseitig senkrecht stehen, was wiederum heisst, dass die Sonnenstrahlen parallel zum Zifferblatt einfallen würden. In diesem Falle würde kein Schatten auf das Zifferblatt fallen.

Nun ist noch zu prüfen, unter welcher Bedingung, wie gefordert, $t > 0$ wird. Ein Skalarprodukt ist genau dann positiv, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren spitz ist. Weil der Gnomon vor dem Zifferblatt montiert wird, ist der Winkel zwischen \vec{g} und $\vec{\text{norm}}$ spitz und daher das Skalarprodukt im Zähler positiv. Im Nenner steht das Skalarprodukt des Richtungsvektors zur Sonne mit $\vec{\text{norm}}$. Der Zwischenwinkel ist dann spitz, wenn die Richtung zur Sonne auf dieselbe Seite des Zifferblatte weist, wie $\vec{\text{norm}}$, das Zifferblatt also von vorne beschienen wird. Damit erhalten wir aus Gleichung 30

Satz: Schatten des Gnomons auf dem Zifferblatt. Sei \vec{g} der Ortsvektor des Gnomons, \vec{s} der Einheitsvektor in Richtung zur Sonne und $\vec{\text{norm}}$ der 3. Basisvektor des Zifferblattsystems. Wenn $\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}} > 0$ ist, so ist der Ortsvektor des Gnomonschattens auf dem Zifferblatt gegeben durch

$$\vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{g} \cdot \vec{\text{norm}}}{\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}}} \cdot \vec{s} \quad (31)$$

¹Das griechische Wort γνομων heisst wörtlich «der Wissende» (der Zeit) und wurde schon in der Antike als Bezeichnung für den Schattenstabes einer Sonnenuhr verwendet. In der Literatur wird das Wort nicht einheitlich gebraucht. Einige Autoren bezeichnen damit jeden Schattenwerfer einer Sonnenuhr, andere wiederum nur für einen Stab, dessen Spitze die Zeit anzeigt. Das griechische Wort ist auch die Wurzel des Begriffes «Gnomonik» als Bezeichnung für die Wissenschaft von den Sonnenuhren.

²Das Wort «Vektor» stammt schliesslich vom lateinischen Wort «vehere» ab, was «fahren» oder «verschieben» heisst.

Wenn $\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}} = 0$ ist, so fallen die Sonnenstrahlen parallel zum Zifferblatt ein und wenn $\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}} < 0$ so steht die Sonne hinter dem Zifferblatt.

Der Gnomonschatten in Standardzifferblattkoordinaten

Die numerische Rechnung gemäss Gleichung 31 kann im Prinzip in einem beliebigen, aber einheitlichen Koordinatensystem durchgeführt werden. Am besten eignet sich das Zifferblattsystem. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir den Ursprung stets so wählen, dass der Gnomon auf die dritte Koordinatenachse zu liegen kommt. Damit wird der Koordinatenursprung zum Fusspunkt des Lotes vom Gnomon aus auf die Zifferblattebene. Dieser Punkt heisst in der Sprache der perspektivischen Projektion der Hauptpunkt. Das so präzierte Koordinatensystem nenne ich im Folgenden das *Standardzifferblattkoordinatensystem*.

Wenn wir die Distanz des Gnomons von der Zifferblattebene mit d bezeichnen, so wird mit dieser Festlegung

$$\vec{g} = d \cdot \vec{\text{norm}} = d \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}_Z \quad (32)$$

Damit wird in Gleichung 31 $\vec{g} \cdot \vec{\text{norm}} = d$. Wenn ferner die Zifferblattkomponenten $\vec{s} = [s_1 \ s_2 \ s_3]^T_Z$ des Einheitsvektors in Richtung zur Sonne sind, so ist $\vec{s} \cdot \vec{\text{norm}} = s_3$. Damit erhalten wir die Zifferblattkomponenten des Ortsvektors des Schattenpunkte

$$\vec{u} = d \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_Z - \frac{1}{s_3} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z \right) = -\frac{d}{s_3} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{bmatrix}_Z \quad \text{falls } s_3 > 0.$$

Die dritte Zifferblattkomponente von \vec{u} verschwindet, was zu erwarten war, weil der Gnomonschatten in der Zifferblattebene liegt.

Es lohnt sich noch, einen Blick auf die Bedeutung von s_3 zu werfen. Aus obiger Herleitung geht hervor, dass $s_3 = \vec{s} \cdot \vec{\text{norm}}$ ist. Das Skalarprodukt ist definiert als das Produkt der Längen der Vektoren und des Kosinus des Zwischenwinkels. Nun haben nach Voraussetzung beide beteiligten Vektoren die Länge 1, weshalb das Skalarprodukt gleich dem Kosinus des Zwischenwinkels ist. Ferner ist der Winkel zwischen der Sonnenrichtung und der Zifferblattnormalen gleich dem Komplementwinkel zwischen der Sonnenrichtung und der Zifferblattebene. Der Kosinus des ersten ist also gleich dem Sinus des zweiten. Wenn wir den Winkel zwischen der Sonnenrichtung und der Zifferblattebene, den sogenannten *Einfallswinkel*, mit ζ bezeichnen, so gilt somit $s_3 = \sin(\zeta)$.

Wir fassen zusammen:

Satz: Standardzifferblattkoordinaten des Gnomonschattens. Auf einer ebenen Sonnenuhr sei ein Standardzifferblattkoordinatensystem gegeben und d sei die Distanz des Gnomons vom Zifferblatt. Die Zifferblattkomponenten des Einheitsvektors in Richtung zur Sonne seien $[s_1 \ s_2 \ s_3]^T_Z$. Dann gilt

- Wenn $s_3 > 0$ ist, so hat der Ortsvektor des Gnomonschattenpunktes die Komponenten

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_Z = -\frac{d}{s_3} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{bmatrix}_Z \quad (33)$$

und der Schattenpunkt auf dem Zifferblatt hat dann die 2-dimensionalen Koordinaten

$$U = (u_1, u_2) = \left(-d \cdot \frac{s_1}{s_3}, -d \cdot \frac{s_2}{s_3} \right) \quad (34)$$

Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen zur Zifferblattebene ist

$$\zeta = \arcsin(s_3) \quad (35)$$

- Wenn $s_3 = 0$ ist, so sind die Sonnenstrahlen parallel zum Zifferblatt, weshalb der Gnomonschatten nicht auf das Zifferblatt fällt.
- Wenn $s_3 < 0$ ist, so scheint die Sonne auf die Rückseite des Zifferblattes, weshalb kein Schatten entsteht.

Nun ist die Position der Sonne aber in der Regel nicht mit einem Richtungsvektor, sondern durch ihre Deklination δ und ihren Stundenwinkel τ definiert. Das sind die Richtungswinkel im ortsfesten Himmelsäquatorsystem. Gemäss Gleichung 3 ist der Einheitsvektor in dieser Richtung

$$\begin{bmatrix} s_{A1} \\ s_{A2} \\ s_{A3} \end{bmatrix}_A = \vec{s}(\delta, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau) \\ \cos(\delta) \sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (36)$$

Diese Äquatorkomponenten müssen nun noch in Zifferblattkomponenten transformiert werden. Dazu müssen sie mit der Standortmatrix multipliziert werden.

$$\begin{bmatrix} s_{H1} \\ s_{H2} \\ s_{H3} \end{bmatrix}_H = T_{AH}(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau) \\ \cos(\delta) \sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (37)$$

Die 3. Komponente s_{H3} enthält ebenfalls eine wichtige Information. Sie gehört zum 3. Basisvektor $\vec{\text{zenit}}$. Wenn diese Komponente positiv ist, steht die Sonne über dem Horizont, wenn sie negativ ist, jedoch unter ihm. Bei Sonnenaufgang und -untergang ist $s_{H3} = 0$. Sie verrät aber noch mehr: Da sowohl der Sonnenrichtungsvektor wie auch der Vektor $\vec{\text{zenit}}$ die Länge 1 haben, ist ihr Skalarprodukt gleich dem Kosinus des Zwischenwinkels. Die Rechnung im Horizontsystem ergibt

$$\vec{s} \cdot \vec{\text{zenit}} = \begin{bmatrix} s_{H1} \\ s_{H2} \\ s_{H3} \end{bmatrix}_H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_H = s_{H3} = \cos(\gamma) \quad (38)$$

wobei γ der Winkel zwischen der Sonnenrichtung zur Zenitrichtung ist. Damit ist γ der Komplementwinkel zum Höhenwinkel der Sonne im Horizontsystem, welcher zwischen der Sonnenrichtung und der Horizontebene gemessen wird. Ferner ist der Kosinus eines Winkels gleich dem Sinus seines Komplementwinkels, womit für den Höhenwinkel h der Sonne gilt $\sin(h) = s_{H3}$ oder

$$h = \arcsin(s_{H3}) \quad (39)$$

Aus den Horizontkomponenten kann man schliesslich die Zifferblattkomponenten bestimmen:

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = T_{HZ}(D, I) \cdot \begin{bmatrix} s_{H1} \\ s_{H2} \\ s_{H3} \end{bmatrix}_H \quad (40)$$

Mit Hilfe der Sonnenuhrmatrix kann man die Zifferblattkomponenten auch direkt aus der Deklination und dem Stundenwinkel gewinnen:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = T_{AZ}(\varphi, D, I) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau) \\ \cos(\delta) \sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (41)$$

Wir fassen zusammen:

Verfahren zur Berechnung des Gnomonschattens

Sei

- φ die *geografischen Breite* des Standortes.
- Die Orientierung des Zifferblattes sei durch seine *Abweichung* D und seine *Neigung* I definiert, und die Distanz des *Gnomons* von der Zifferblattebene sei d .
- Die Position der Sonne sei mit der *Deklination* δ und dem *Stundenwinkel* τ gegeben.

Im Folgenden wird zuerst ein ausführliches und danach ein abgekürztes Verfahren beschrieben.

A. Prozedur 1. Ausführliches Verfahren

1. Man berechnet die Standortmatrix

$$T_{AH}(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & 0 & -\cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (42)$$

und die Orientierungsmatrix der Sonnenuhr

$$T_{HZ}(D, I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(I) & -\sin(I) \\ 0 & \sin(I) & \cos(I) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(D) & -\cos(D) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(D) & \sin(D) & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(D) & -\cos(D) & 0 \\ -\cos(D)\sin(I) & -\sin(D)\sin(I) & \cos(I) \\ \cos(D)\cos(I) & \sin(D)\cos(I) & \sin(I) \end{bmatrix}$$

2. Nun bestimmt man den Richtungsvektor zur Sonne (im Folgenden kurz Sonnenvektor genannt). Seine Äquatorkomponenten sind

$$\vec{s}(\delta, \tau) = \begin{bmatrix} s_{A1} \\ s_{A2} \\ s_{A3} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \cos(\delta)\cos(\tau) \\ \cos(\delta)\sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (44)$$

Daraus berechnet man seine Horizontkomponenten

$$\begin{bmatrix} s_{H1} \\ s_{H2} \\ s_{H3} \end{bmatrix}_H = T_{AH}(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} s_{A1} \\ s_{A2} \\ s_{A3} \end{bmatrix}_A \quad (45)$$

- Wenn $s_{H3} < 0$ ist, so steht die Sonne unter dem Horizont, es entsteht kein Gnomonschatten und das Verfahren ist beendet.
- Wenn $s_{H3} = 0$ ist, so geht die Sonne gerade auf oder unter.
- Wenn $s_{H3} > 0$ ist, so steht die Sonne über dem Horizont und ihr Höhenwinkel beträgt

$$h = \arcsin(s_{H3}) \quad (46)$$

3. Nun bestimmt man die Zifferblattkomponenten des Sonnenvektors.

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = T_{HZ}(D, I) \cdot \begin{bmatrix} s_{H1} \\ s_{H2} \\ s_{H3} \end{bmatrix}_H \quad (47)$$

- Wenn $s_3 < 0$ ist, so steht die Sonne hinter dem Zifferblatt. es entsteht kein Gnomonschatten und das Verfahren ist beendet.

- Wenn $s_3 = 0$ ist, so fallen die Sonnenstrahlen parallel zum Zifferblatt ein. In diesem Fall wirft der Gnomon zwar einen Schatten, dieser fällt jedoch nicht auf die Zifferblattebene und das Verfahren ist beendet.
- Wenn $s_3 > 0$ ist, so fallen die Sonnenstrahlen auf die Vorderseite der Zifferblattebene und bilden mit dieser den Winkel

$$\zeta = \arcsin(s_3) \quad (48)$$

Es entsteht in der Ebene des Zifferblattes ein Schatten, dessen Ortsvektor

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_Z = -\frac{d}{s_3} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 0 \end{bmatrix}_Z \quad (49)$$

ist. Der Schattenpunkt hat die 2-dimensionalen Zifferblattkoordinaten

$$U = \left(-d\frac{s_1}{s_3}, -d\frac{s_2}{s_3} \right) \quad (50)$$

- B. Wenn klar ist, dass die Sonne genügend hoch über dem Horizont und der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen auf die Zifferblattebene genügend gross ist, so dass der Gnomonschatten auf das Zifferblatt fällt, so kann man das obige Verfahren abkürzen.

Prozedur 2. Abgekürztes Verfahren

1. Aus der Standortmatrix und der Orientierungsmatrix gemäss Schritt 1 des ausführlichen Verfahrens bestimmt man die Sonnenuhrmatrix

$$M = T_{AZ}(\varphi, D, I) = T_{HZ}(D, I) \cdot T_{AH}(\varphi) \quad (51)$$

Im häufigen Falle eines vertikalen Zifferblattes ($I = 0$) wird die Sonnenuhrmatrix recht einfach

$$M = T_{AZ}(\varphi, D, 0) = \begin{bmatrix} \sin(D)\sin(\varphi) & -\cos(D) & -\sin(D)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ \cos(D)\sin(\varphi) & \sin(D) & -\cos(D)\cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (52)$$

2. Nun können für beliebig viele Sonnenstände die 2D-Zifferblattkomponenten des Gnomoschattens U direkt aus den Äquatorkomponenten der Sonnenrichtung berechnet werden.

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(\delta)\cos(\tau) \\ \cos(\delta)\sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (53)$$

$$U = \left(-d\frac{s_1}{s_3}, -d\frac{s_2}{s_3} \right) \quad (54)$$

Die Sonnenuhrmatrix M und die Gnomondistanz d bestimmen eine ebene Sonnenuhr mit punktförmigem Schattenwerfer vollständig. Die Sonnenuhrmatrix muss für eine bestimmte Sonnenuhr nur einmal berechnet werden, danach können beliebig viele Schattenpunkte mit geringem Aufwand ermittelt werden.

Beispiel. Wir betrachten eine vertikale Süduhr in Luzern. Der Gnomon sei in einer Distanz von einer Einheit vor dem Zifferblatt platziert.

Wir wollen den Schatten des Gnomons am 21. Mai 2018 um 10 Uhr vormittags wahrer Ortszeit bestimmen.

- $\varphi = 47^\circ$, $D = 0^\circ$, $I = 0^\circ$ und $d = 1$.
- Die Sonnendeklination beträgt am 21. Mai $\delta = 20^\circ$ und der Stundenwinkel um 10 Uhr WOZ $\tau = -30^\circ$.

A. Wir gehen zuerst nach der ausführlichen Version vor.

I. Die Standortmatrix ist

$$T_{AH}(47^\circ) = \begin{bmatrix} \sin(47^\circ) & 0 & -\cos(47^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(47^\circ) & 0 & \sin(47^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.73135 & 0 & -0.68200 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \end{bmatrix}$$

und die Orientierungsmatrix

$$T_{HZ}(0^\circ, 0^\circ) = \begin{bmatrix} \sin(0^\circ) & -\cos(0^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(0^\circ) & \sin(0^\circ) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

II. Die Äquatorkomponenten des Richtungsvektors zur Sonne sind

$$\begin{bmatrix} s_{A1} \\ s_{A2} \\ s_{A3} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \cos(20^\circ) \cos(-30^\circ) \\ \cos(20^\circ) \sin(-30^\circ) \\ \sin(20^\circ) \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.81380 \\ -0.46985 \\ 0.34202 \end{bmatrix}_A \quad (56)$$

Daraus die Horizontkomponenten

$$\begin{bmatrix} s_{H1} \\ s_{H2} \\ s_{H3} \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} 0.73135 & 0 & -0.68200 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.81380 \\ -0.46985 \\ 0.34202 \end{bmatrix}_A \quad (57)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.36192 \\ -0.46985 \\ 0.80515 \end{bmatrix}_H$$

Die letzte Komponente ist positiv, die Sonne steht also über dem Horizont (was aus der Erfahrung ohnehin klar ist), und zwar gemäss Gleichung 48

$$h = \arcsin(0.80515) = 53.6^\circ \quad (58)$$

über dem Horizont.

III. Nun können wir die Zifferblattkomponenten mit Hilfe der Orientierungsmatrix bestimmen.

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.36192 \\ -0.46985 \\ 0.80515 \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} 0.46985 \\ 0.80515 \\ 0.36192 \end{bmatrix}_Z \quad (59)$$

Die letzte Komponente ist positiv, die Sonne steht also vor dem Zifferblatt (was ebenfalls zu erwarten war). Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen auf das Zifferblatt beträgt gemäss Gleichung 39

$$h = \arcsin(0.36192) = 21.2^\circ \quad (60)$$

Nun wird die Projektion berechnet. Mit der Gnomondistanz $d = 1$ erhalten wir

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46985 \\ -0.46985 \\ 0.80515 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46985 \\ -0.46985 \\ 0.80515 \end{bmatrix}$$

Die Zifferblattkoordinaten des Schattenpunktes sind also

$$U = (-1.29822, -2.22467)$$

B. Beim abgekürzten Verfahren berechnen wir direkt die Sonnenuhrmatrix als Produkt der Orientierungsmatrix mit der Standortmatrix.

$$\begin{aligned} \text{I. } M &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.73135 & 0 & -0.68200 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.73135 & 0 & -0.68200 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

II. und rechnen mit ihrer Hilfe die Äquatorkomponenten direkt in Zifferblattkomponenten um

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z &= M \cdot \begin{bmatrix} \cos(20^\circ) \cos(-30^\circ) \\ \cos(20^\circ) \sin(-30^\circ) \\ \sin(20^\circ) \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.46985 \\ 0.80515 \\ 0.36192 \end{bmatrix}_Z \\ U &= \left(-\frac{0.46985}{0.36192}, -\frac{0.80515}{0.36192} \right) = (-1.29822, -2.22467) \end{aligned}$$

Die gnomonische Abbildung der Himmelsphäre

Das Verfahren zur Berechnung des Gnomonschattens definiert mathematisch betrachtet eine Abbildung, welche geeigneten Sonnenrichtungen einen Punkt auf der Zifferblattebene zuordnet. Diese kann man zwanglos auch auf Richtungen ausdehnen, aus denen die Sonne aus astronomischen Gründen gar nie scheinen kann. So wird eine Abbildung der Himmelskugel auf die Ebene des Zifferblattes etabliert. Die Richtung kann, wie in „Richtungswinkel und Richtungsvektoren“ gezeigt, entweder mittels zweier Winkel oder mit einem Richtungsvektor beschrieben werden. Die Länge eines solchen Richtungsvektors ist irrelevant, und man kann sich daher im Prinzip auf Vektoren der Länge 1 beschränken. Das ist zwar nicht zwingend, doch werden wir im Folgenden in der Regel solche Einheitsvektoren wählen (Details siehe Umrechnung von Richtungswinkeln in einen Richtungsvektor): Die Komponenten des Einheitsvektors in die Richtung mit der Schwenkung σ und der Neigung ν bezogen auf betrachteten Basis sind

$$\begin{bmatrix} \cos(\nu) \cos(\sigma) \\ \cos(\nu) \sin(\sigma) \\ \sin(\nu) \end{bmatrix} \quad (63)$$

Die gnomonische Funktion einer Sonnenuhr

Der Schattenwurf des Gnomons auf die Zifferblattebene stellt eine Zentralprojektion der Himmelskugel auf die Zifferblattebene dar. Eine Zentralprojektion eines Körpers auf eine Fläche nennt man eine *gnomonische Projektion*. Neben gnomonischen Anwendungen wird aber nicht nur für Sonnenuhren verwendet, sie ist zum Beispiel auch in der Kartographie als Abbildung der Erdoberfläche oder in der Kristallographie in Gebrauch. Die Projektionsfläche ist bei einer gnomonischen Projektion im Prinzip beliebig, doch stehen im Rahmen dieser Abhandlung Ebenen im Fokus.

Definition: Gnomonische Funktion. Die durch eine Sonnenuhr vermittelte gnomonische Projektion p , kurz *Sonnenuhrfunktion* genannt, ordnet jedem Richtungsvektor \vec{r} im dreidimensionalen Raum den zweidimensionalen Ortsvektor $p(\vec{r})$ eines Punktes P auf der Zifferblattebene zu. Dabei ist P der Durchstoßpunkt jener Geraden durch die Zifferblattebene, welche den Gnomon enthält und die Richtung von \vec{r} hat.

Die Sonnenuhrfunktion ist eine Abstraktion und Erweiterung der realen Schattenfunktion. Sie berücksichtigt nicht, ob die Sonne über oder unter dem Horizont sowie ob sie vor oder hinter dem Zifferblatt steht, was im Folgenden gelegentlich ausgenützt wird.

Satz. Kollineare Vektoren haben dasselbe gnomonische Bild. Wenn c eine beliebige Konstante ist, so gilt also

$$p(c \cdot \vec{r}) = p(\vec{r}) \quad (64)$$

Insbesondere gilt

Korollar. Ein Vektor und sein Gegenvektor haben stets dasselbe gnomonische Bild.

Der Beweis ist trivial: Kollineare Richtungsvektoren definieren dieselbe Gerade durch den Gnomon, weshalb sich auch derselbe Durchstoßpunkt durch die Projektionsebene ergibt.

Die Sonnenuhrfunktion ist an sich nicht umkehrbar. Wenn die Projektionsebene eine definierte Vorderseite hat, welche beim Zifferblattkoordinatensystem durch den 3. Basisvektor \vec{v}_3 definiert ist, so kann man aber eine umkehrbare Restriktion konstruieren, indem man den Definitionsbereich auf Einheitsvektoren beschränkt, welche in dieselbe Halbebene wie \vec{v}_3 weisen.

Berechnung der gnomonischen Funktion in Standardzifferblattkomponenten

Wir betrachten eine ebene Sonnenuhr mit der Sonnenuhrmatrix M und mit punktförmigem Gnomon im Abstand d von der Zifferblattebene. Die Komponenten des Richtungsvektors im Standard-Zifferblattkoordinatensystem seien

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_Z \quad (65)$$

Wenn $r_3 \neq 0$ ist, dann gilt

$$p(\vec{r}) = -\frac{d}{r_3} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}_Z \quad (66)$$

Wenn $r_3 = 0$ ist, dann ist die Projektionsrichtung parallel zur Zifferblattebene und es ist kein Funktionswert definiert.

Der Beweis erfolgt durch elementare Vektorgeometrie (Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene).

Wenn \vec{r} in Äquatorkomponenten gegeben ist, so muss er in einem ersten Schritt in Zifferblattkomponenten umgerechnet werden. Sei

$$M = T_{AZ}(\varphi, D, I) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (67)$$

die Sonnenuhrmatrix (siehe Gleichung 14) und

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_{A1} \\ r_{A2} \\ r_{A3} \end{bmatrix}_A \quad (68)$$

die Äquatorkomponenten des Richtungsvektors. Dann sind dessen Zifferblattkomponenten

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} r_{A1} \\ r_{A2} \\ r_{A3} \end{bmatrix}_A$$

Prominente Vektoren des Äquatorsystems sind ihre drei Basisvektoren. Ihre Komponenten bezüglich der Zifferblattbasis sind

$$\overrightarrow{\text{aekulm}} = M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}_Z$$

$$\overrightarrow{\text{west}} = M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix}_Z$$

$$\overrightarrow{\text{nordpol}} = M \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{bmatrix}_Z$$

Die Spalten der Sonnenuhrmatrix sind also gerade die Zifferblattkomponenten der Basisvektoren des Äquatorsystems. Damit gilt

- Wenn $m_{31} \neq 0$ ist

$$p(\overrightarrow{\text{aekulm}}) = -\frac{d}{m_{31}} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}_Z \quad (69)$$

- Wenn $m_{32} \neq 0$ ist

$$p(\overrightarrow{\text{west}}) = -\frac{d}{m_{32}} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix}_Z \quad (70)$$

- Wenn $m_{33} \neq 0$ ist

$$p(\overrightarrow{\text{nordpol}}) = -\frac{d}{m_{33}} \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{bmatrix}_Z \quad (71)$$

Abbildung von Himmelskurven

Aus Sicht des Sonnenuhrmachers interessiert, wie spezielle Sonnenbahnen, also Kurven auf der Himmelskugel, durch die gnomonische Funktion auf die Zifferblattebene abgebildet werden. Viele wichtige Kurven kann man mathematisch durch ihre *Parameterdarstellung* beschreiben, das heisst, dass man die Richtungsvektoren zu den Kurvenpunkten als Funktion einer Hilfsgrösse, des sogenannten Parameters ζ , darstellt. In Äquatorkomponenten sähe das so aus

$$\overrightarrow{s(\zeta)} = \begin{bmatrix} s_{A1}(\zeta) \\ s_{A2}(\zeta) \\ s_{A3}(\zeta) \end{bmatrix}_A \quad (72)$$

In einem ersten Schritt müssen sie in Zifferblattkomponenten umgerechnet werden. Mit der Sonnen-
uhrmatrix M erhält

$$\overrightarrow{s(\xi)} = \begin{bmatrix} s_1(\xi) \\ s_2(\xi) \\ s_3(\xi) \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} s_{A1}(\xi) \\ s_{A2}(\xi) \\ s_{A3}(\xi) \end{bmatrix}_A \quad (73)$$

Die Bilder diese *Himmelskurven* auf dem Zifferblatt sind dann gemäss Gleichung 66

$$p(\overrightarrow{s(\xi)}) = -\frac{d}{s_3(\xi)} \begin{bmatrix} s_1(\xi) \\ s_2(\xi) \end{bmatrix}_Z \quad (74)$$

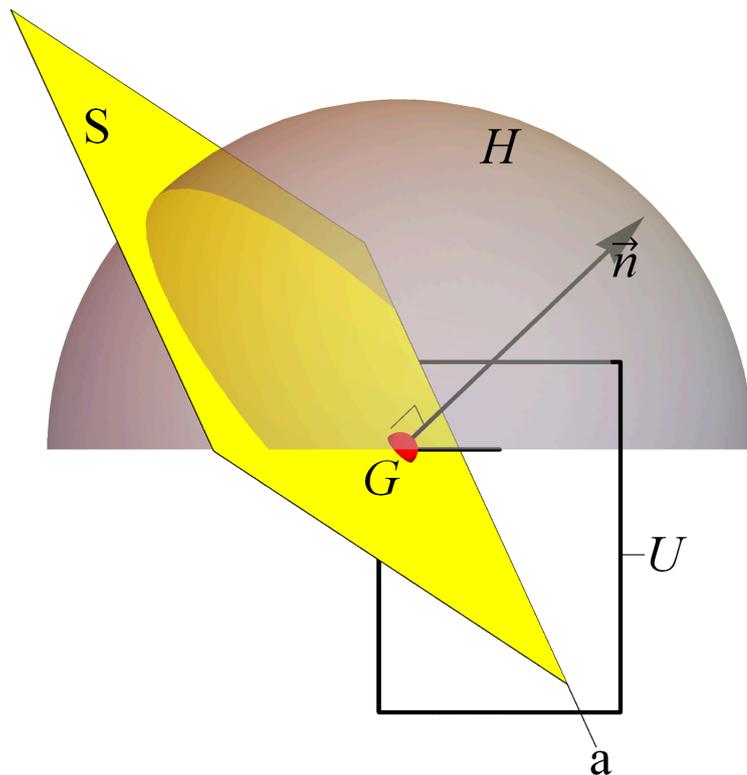
falls $s_3(\xi) \neq 0$.

Im Folgenden studieren wir einige gnomisch wichtige Himmelskurven.

Abbildung von Grosskreisen

Von besonderem Interesse ist, welche Himmelskurven als Geraden auf die Zifferblattebene abgebildet werden, weil Geraden besonders einfach zu konstruieren sind. Man betrachte die folgende Abbildung:

Abbildung 10. Zifferblattgeraden und Grosskreisebenen



U ist die Zifferblattebene, G der Gnomonpunkt, S eine
Grosskreisebene und \vec{n} ein Normalenvektor auf diese.

U sei die Zifferblattebene einer Sonnenuhr und a eine beliebige Grade auf dieser. Der Gnomonschatten fällt genau dann auf die Gerade, wenn die Sonne in einer Ebene S liegt, welche a und den Gnomonpunkt G enthält. Der Gnomonpunkt stellt das Zentrum der Himmelskugel dar. Eine Ebene, welche das

Kugezentrum enthält, schneidet die Kugeloberfläche definitionsgemäss in einem Grosskreis. Umgekehrt liegt jeder Grosskreis in einer Ebene, welche das Kugelzentrum enthält, weshalb der Schatten der Gnomons auf die Schnittgerade der Grosskreisebene mit der Zifferblattebene fällt. Daraus folgt

Satz. Das gnomonische Bild einer Himmelskurve ist genau dann eine Gerade, wenn die Himmelskurve ein Grosskreis ist.

—

Die Lage der Grosskreisebene kann mit Hilfe eines Normalenvektors \vec{n} definiert werden, die Bildgerade auf dem Zifferblatt mit einem Fixpunkt A und einem Richtungsvektor \vec{v} . Wenn \vec{a} der Ortsvektor von A ist, so haben die Ortsvektoren der Geradenpunkt die Darstellung

$$\vec{g}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \quad (75)$$

mit dem Parameter t .

Sei nun $s(\xi)$ die Darstellung der Richtungsvektoren zu den Punkten des Grosskreises in Abhängigkeit des Parameters ξ .

- Den Ortsvektor \vec{a} eines Fixpunktes gewinnt man, indem man eine beliebige Richtung \vec{s} des Grosskreises am Himmel mit der gnomonische Funktion p auf das Zifferblatt abbildet.

$$\vec{a} = p(\vec{s})$$

- Einen Richtungsvektor \vec{v} gewinnt man mit folgender Überlegung: Die Bildgerade ist die Schnittgerade zwischen der Grosskreisebene und der Zifferblattebene. Die Punkte der Grosskreisebene stehen senkrecht zu ihrem Normalenvektor \vec{n} , und die Punkte der Zifferblattebene stehen senkrecht zum Normalenvektor \vec{vorn} der Zifferblattebene. Ein Richtungsvektor der Schnittgeraden gehört nun beiden Ebenen an und steht somit senkrecht zu beiden genannten Normalenvektoren. Einen zu zwei Vektoren senkrechten Vektor liefert deren Vektorprodukt.

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{vorn}$$

Die Standardzifferblattkomponenten von $\vec{vorn} = [0 \ 0 \ 1]_Z^T$ sind trivial. Der Normalenvektor auf die Grosskreisebene ist in der Regel in Äquatorkomponenten gegeben, welche noch in Zifferblattkomponenten umberechnet werden müssen.

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \vec{n}|_A \quad (76)$$

wobei M die Sonnenuhrmatrix ist. Ein Richtungsvektor ist dann

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{vorn} = \begin{bmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ 0 \end{bmatrix}_Z \quad (77)$$

oder in 2D

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{bmatrix}_Z \quad (78)$$

falls die ersten beiden Zifferblattkomponenten nicht verschwinden.

Alternativ könnte man natürlich auch das Bild \vec{b} einer zweiten Grosskreisrichtung bestimmen. Dann wäre $\vec{b} - \vec{a}$ ebenfalls ein Richtungsvektor.

Die gnomonischen Bilder des Himmelsäquators und des Himmelsmeridians

Zwei fundamentale Grosskreise am Himmel sind der Himmelsäquator und der Himmelsmeridian. Definitionsgemäss steht die Sonne an den beiden Tagundnachtgleichen in der Äquatorebene und am wahren Mittag jedes Tages in der Meridianebene.

Der Zifferblattäquator

Die Himmelsäquatorebene wird von den beiden Basisvektoren \overrightarrow{aekulm} und \overrightarrow{west} aufgespannt, und $\overrightarrow{nordpol}$ ist ein Einheitsnormalenvektor auf sie. Der Himmelsäquator ist die Menge aller Himmelsrichtungen mit der Deklination $\delta = 0$. Gemäss Gleichung 36 haben diese somit die Parameterdarstellung

$$\overrightarrow{e}(\tau) = \overrightarrow{s}(0, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (79)$$

mit dem Stundenwinkel τ als Parameter. Sei nun

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (80)$$

die Sonnenuhrmatrix. Dann sind die Zifferblattkomponenten

$$\overrightarrow{e}(\tau) = \begin{bmatrix} e_1(\tau) \\ e_2(\tau) \\ e_3(\tau) \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Je nach Ausrichtung des Zifferblattes liefern die Richtungen \overrightarrow{aekulm} und \overrightarrow{west} oder deren Gegenvektoren Fixpunkte der Bildgeraden. Gemäss Gleichung 69, Gleichung 70 und Gleichung 64 gilt:

- Wenn $m_{31} \neq 0$ ist

$$\vec{a} = p(\pm \overrightarrow{aekulm}) = -\frac{d}{m_{31}} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}_Z \quad (81)$$

- Wenn $m_{32} \neq 0$ ist

$$\vec{b} = p(\pm \overrightarrow{west}) = -\frac{d}{m_{32}} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix}_Z \quad (82)$$

Aus dem Normalenvektor $\overrightarrow{nordpol}$ gewinnt man gemäss Gleichung 78 den Richtungsvektor der Geraden. Seine Zifferblattkomponenten sind durch die 3. Spalte der Sonnenuhrmatrix gegeben.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} m_{23} \\ -m_{13} \end{bmatrix}_Z \quad (83)$$

Das Bild des Himmelsäquators auf dem Zifferblattebene nennen wir kurz den *Zifferblattäquator*.

Der Zifferblattmeridian

Die *Himmelsmeridiane* wird von den Basisvektoren \overrightarrow{aekulm} und $\overrightarrow{nordpol}$ aufgespannt, und \overrightarrow{west} ist ein Normalenvektor auf sie. Der Himmelsmeridian ist die Menge der Richtungen an der Himmelskugel, deren Stundenwinkel $\tau = 0$ ist. Gemäss Gleichung 36 hat diese die Äquatorkomponenten

$$\overrightarrow{m(\delta)} = \overrightarrow{s(\delta, \vec{0})} = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (84)$$

wobei hier die Deklination δ die Rolle des Parameters spielt. Die Zifferblattkomponenten sind

$$\overrightarrow{m(\delta)} = \begin{bmatrix} m_1(\delta) \\ m_2(\delta) \\ m_3(\delta) \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (85)$$

Das Bild der Himmelsmeridianebene auf der Zifferblattebene nennen wir den *Zifferblattmeridian*. Das Bild von \overrightarrow{aekulm} liefert uns einen Fixpunkt; es wurde schon oben bestimmt. Wenn $m_{31} \neq 0$ ist, gilt liefert auch

$$\vec{c} = p(\pm \overrightarrow{nordpol}) = -\frac{d}{m_{33}} \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{bmatrix}_Z \quad (86)$$

einen weiteren Fixpunkt. Die Zifferblattkomponenten des Normalenvektors \overrightarrow{west} sind die Elemente der 2. Spalte der Sonnenuhrmatrix. Aus ihnen gewinnt man gemäss Gleichung 78 den Richtungsvektor der Bildgeraden

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} m_{22} \\ -m_{12} \end{bmatrix}_Z \quad (87)$$

Sonderfälle

Bleibt noch zu diskutieren, was es bedeutet, wenn das letzte Element einer Spalte der Sonnenuhrmatrix verschwindet. Das 3. Element jeder Spalte ist die 3. Zifferblattkomponente des entsprechenden Basisvektors des Äquatorsystems, also die Komponente in Richtung \overrightarrow{vom} . Diese verschwindet, wenn der Basisvektor parallel zur Zifferblattebene verläuft, weshalb der Gnomon in dieser Richtung keinen Schatten wirft. Speziell gilt:

- Wenn $m_{31} = 0$ ist, dann ist das Zifferblatt parallel zu \overrightarrow{aekulm} . Am wahren Mittag der beiden Tagundnachtgleichen wirft der Gnomon also keinen Schatten auf das Zifferblatt.
- Wenn $m_{32} = 0$ ist, dann ist das Zifferblatt parallel zu \overrightarrow{west} . Beim mathematischen Sonnenaufgang und -untergang an den beiden Tagundnachtgleichen wirft der Gnomon keinen Schatten auf das Zifferblatt.
- Wenn $m_{33} = 0$ ist, dann ist das Zifferblatt parallel zu $\overrightarrow{nordpol}$.

Die Sonnenuhrmatrix liefern also mit geringem Aufwand die Bilder von Himmelsäquator und Himmelsmeridian. Die Bedeutung der Elemente der Sonnenuhrmatrix sei im Folgenden zusammengefasst:

Bedeutung der Sonnenuhrmatrix

Sei

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (88)$$

die Sonnenuhrmatrix, ferner d die Distanz des Gnomons von der Zifferblattebene. Dann gilt

1. Spalte:

Wenn $m_{31} \neq 0$, so ist ihr gnomonisches Bild der Ortsvektor des Schnittpunktes der Bilder des Himmelsäquators und des Himmelsmeridians, also des Ursprungs des Himmelsäquatorsystems.

$$\vec{a} = -\frac{d}{m_{31}} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix}_Z \quad (89)$$

2. Spalte:

Liefert einen Richtungsvektor des Zifferblattmeridians.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} m_{22} \\ -m_{12} \end{bmatrix}_Z \quad (90)$$

Wenn $m_{32} \neq 0$, so ist ihr gnomonisches Bild zudem der Ortsvektor eines weiteren Punktes des Bildes des Himmelsäquators.

$$\vec{b} = -\frac{d}{m_{32}} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix}_Z$$

3. Spalte:

Liefert einen Richtungsvektor des Zifferblattäquators

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} m_{23} \\ -m_{13} \end{bmatrix}_Z \quad (91)$$

Wenn $m_{33} \neq 0$, so ist ihr gnomonisches Bild zudem der Ortsvektor eines weiteren Punktes des Bildes des Himmelsmeridians.

$$\vec{c} = -\frac{d}{m_{33}} \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{bmatrix}_Z \quad (92)$$

—

Beispiel. Das Zifferblatt einer ebenen, vertikalen Sonnenuhr bei einer geographischen Breite von $\varphi = 47^\circ$ weicht um $D = 15^\circ$ aus der Südrichtung nach Westen ab. Die Distanz des Gnomons zum Zifferblatt sei $d = 1$.

Da sich alle folgenden Vektorkomponenten auf das Zifferblattsystem beziehen, verzichten wir in den Formeln jeweils auf den Index Z

Die Sonnenuhrmatrix ist gemäss Gleichung 15

$$M = \begin{bmatrix} 0.18929 & -0.96593 & -0.17651 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.70643 & 0.25882 & -0.65876 \end{bmatrix}$$

Die 1. Spalte liefert den Ortsvektor des Schnittpunktes A der Bildegeraden von Himmelsäquator und Himmelsmeridian.

$$\vec{a} = -\frac{1}{0.70643} \begin{bmatrix} 0.18929 \\ 0.68200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26795 \\ -0.96541 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Die 2. Spalte liefert den Richtungsvektor des Zifferblattäquators

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.96593 \end{bmatrix}$$

Zudem den Ortsvektor eines weiteren Punktes B des Zifferblattäquators

$$\vec{b} = -\frac{1}{0.25882} \begin{bmatrix} -0.96593 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.73205 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

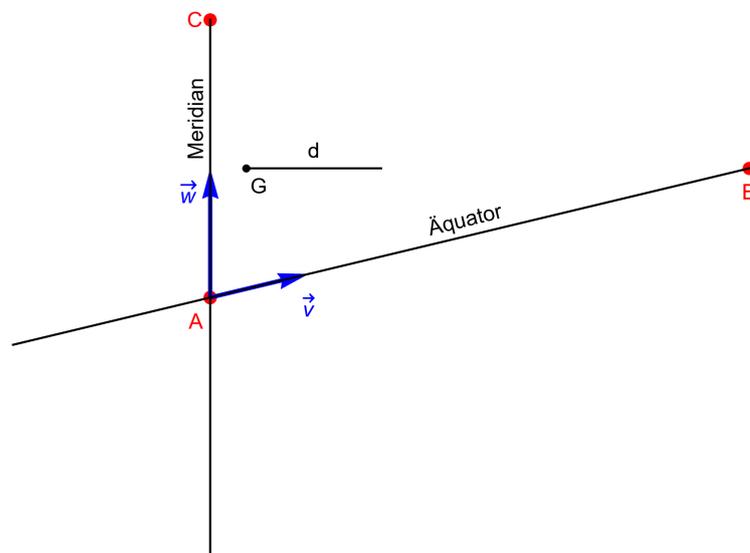
Die 3. Spalte liefert den Richtungsvektor des Zifferblattäquators

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0.73135 \\ 0.17651 \end{bmatrix} \quad (95)$$

sowie den Ortsvektor eines zweiten Punktes C des Zifferblattmeridians

$$\vec{c} = -\frac{1}{-0.65876} \begin{bmatrix} -0.17651 \\ 0.73135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.26795 \\ 1.11020 \end{bmatrix} \quad (96)$$

***Graphisch präsentieren sich die Bilder der Himmelsäquators und des Himmelsmeridians wie folgt



Das gnomonische Bild des Himmelsäquators auf dem Zifferblatt ist die Äquinoktiallinie der Sonnenuhr, das Bild des Ortsmeridians ist die Linie des wahren Mittags. Der Punkt G ist der Fußpunkt des Gnomons und die Strecke d seine Distanz von der Zifferblattebene.

Die Meridianlinie verläuft also auf dem Zifferblatt vertikal – bei einem vertikalen Zifferblatt für den versierten Sonnenuhrenfreund eine Binsenwahrheit!

Die Lineaturen für verschiedene Indikationen

Die zu einer bestimmten Indikation gehörenden Zifferblattlinien sind Mengen von Punkten, auf welche der Gnomonschatten fällt, wenn die Sonne eine spezielle Bahn an der Himmelssphäre beschreibt. Oft kann eine solche durch eine spezielle Deklinations-Stundenwinkel-Konstellationen der Sonne beschrieben werden. Der Einheitsvektor in Richtung zur Sonne ist dann in Äquatorkomponenten

$$\mathbf{s}(\tau, \delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau) \\ \cos(\delta) \sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (97)$$

So ist zum Beispiel eine Stundenlinien für die wahre Ortszeit 10 Uhr die Mengen der Punkte, auf welche der Gnomonschatten beim Stundenwinkel $\tau = -30^\circ$ und beliebiger Sonnendeklination und fällt. Die Tierkreislinien wiederum sind Mengen von Punkten, auf welche der Gnomonschatten bei

einer bestimmten, konstanten Sonnendeklinationen und variablem Stundenwinkel fällt. Man kann im Prinzip die Lineatur für eine Indikation approximativ konstruieren, indem man eine Anzahl von genügend nahe beieinanderliegenden Schattenpunkten berechnet und diese interpoliert. Wenn die betrachteten Sonnenbahnen aber Grosskreise sind, so sind die Linien der Indikation, wie wir gesehen haben, Geraden, welche einem Punkt und einem Richtungsvektor oder mit zwei Punkten vollständig bestimmt sind.

Im Folgenden betrachten wir die Lineaturen einiger geläufiger Indikationen im Detail.

Stundenwinkel und wahre Ortszeit

Die wahre Ortszeit (WOZ) ist proportional zum Stundenwinkel τ der Sonne, jedoch unabhängig von der Deklination δ . Wenn man die 24-Stunden-Zählung voraussetzt, kann man die WOZ schlicht als alternative Masseinheit zum Gradmass sehen.

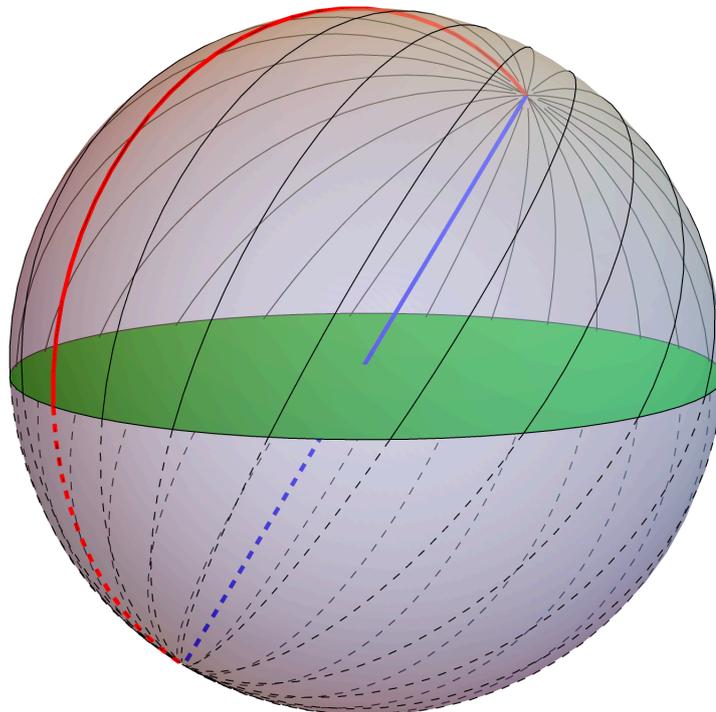
$$t_{\text{WOZ}} = \frac{\tau}{15^\circ} + 12 \quad (98)$$

Umgekehrt ist

$$\tau = (t_{\text{WOZ}} - 12) \cdot 15^\circ \quad (99)$$

Die Himmelskurven konstanten Stundenwinkels sind Halbkreise, welche die beiden Himmelspole verbinden, und damit Stücke von Grosskreisen.

Abbildung 11. Die Stundenwinkellinien an der Himmelskugel

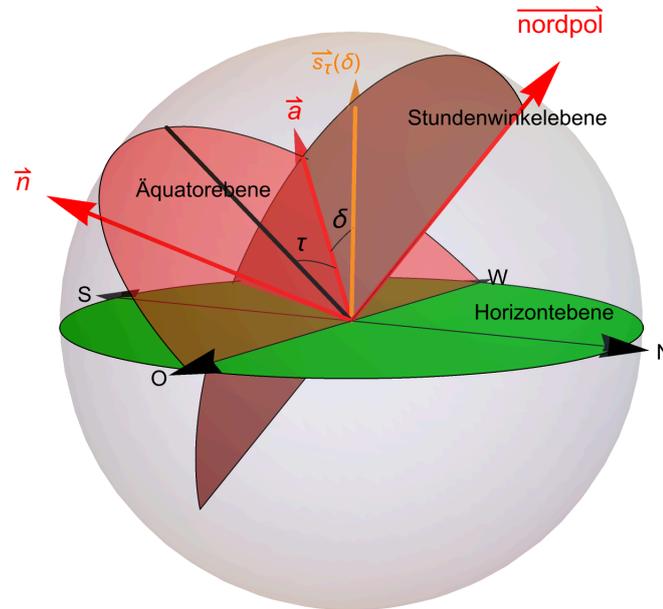


Die Kreise konstanten Stundenwinkels im Abstand von 15° entsprechend 1 Stunde auf der Himmelskugel. Rot: Orstmeridian ($\tau = 0$), grün: Ortshorizont, blau: Himmelspolachse.

Die Vektoren, die zu den Punkten des Stundenwinkelkreises mit der wahren Ortszeit τ gerichtet sind, haben in Äquatorkomponenten die folgende Parameterdarstellung

$$\vec{s}_\tau(\delta) = \vec{s}(\delta, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\delta)\cos(\tau) \\ \cos(\delta)\sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (100)$$

wobei $\vec{s}(\delta, \tau)$ die Richtung zur Sonne gemäss Gleichung 36 ist. Für jeden Parameter δ liegt dieser Vektor in einer Ebene, welche die Himmelspolachse enthält und daher senkrecht auf der Himmelsäquatorebene steht. Diese Ebene heisst die *Stundenwinkelebene* von τ .



Alle Stundenwinkelebenen enthalten den Himmelsnordpol. Die Bilder aller Stundenwinkelkreise am Himmel sind auf dem Zifferblatt daher Geradenstücke, welche durch das Bild des Himmelsnordpols verlaufen. Wenn m_{ij} die Elemente der Sonnenuhrmatrix und d die Distanz des Gnomons vom Zifferblatt ist, so ist Gleichung 71 die Projektion des Himmelsnordpols

$$\overrightarrow{\text{nordpol}}' = p(\pm \overrightarrow{\text{nordpol}}) = -\frac{d}{m_{33}} \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{bmatrix}_Z \quad (101)$$

falls $m_{33} \neq 0$ ist.

Der Himmelsnordpol ist allen Stundenwinkelebenen gemeinsam, weshalb dieser Punkt zu allen WOZ-Stundenlinien auf dem Zifferblatt gehört. Es handelt sich um den Fusspunkt eines virtuellen Polstabes, welcher dem Gnomon enthält.

Aus der Parameterdarstellung Gleichung 100 erhält man mit $\delta = 0$ einen Einheitsvektor in Richtung der Schnittgeraden der Stundenwinkelebene mit der Himmelsäquatorebene.

$$\vec{a}_0 = \vec{s}(0^\circ, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Seine Zifferblattkomponenten sind

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (102)$$

Das ist der Sonnenstand beim Stundenwinkel τ anlässlich den beiden Tagundnachtgleichen. Er ist ein Einheitsvektor und steht senkrecht zu $\overrightarrow{\text{nordpol}}$.

Falls $a_3 > 0$ ist, so ist das gnomonische Bild

$$\overrightarrow{a'} = p(\overrightarrow{a}) = -\frac{d}{a_3} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_Z \quad (103)$$

Das ist der Ortsvektor des Schnittpunktes der Stundenlinie mit dem Zifferblattäquator. Der Vektor mit derselben Deklination $\delta = 0$, aber 90° kleinerem Stundenwinkel

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s}(0^\circ, \tau - 90^\circ) = \begin{bmatrix} \cos(\tau - 90^\circ) \\ \sin(\tau - 90^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \sin(\tau) \\ -\cos(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

hat ebenfalls die Länge 1 und steht senkrecht zur Stundenwinkelebene. Seine Zifferblattkomponenten sind

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \sin(\tau) \\ -\cos(\tau) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (104)$$

Aus ihm gewinnt man einen Richtungsvektor der Zifferblattlinie gemäss Gleichung 78

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{bmatrix}_Z \quad (105)$$

Bei Bedarf kann man aus der Parameterdarstellung Gleichung 100 beliebig viele weitere Punkte der Stundenlinien berechnen. So kann es beispielsweise sowohl sachlich wie ästhetisch reizvoll sein, nur jenen Teil der Stundenlinien zu zeichnen, auf welche der Gnomonschatten im Verlauf des Jahre auch tatsächlich fallen kann. Die Enden der Geradenstücke liegen dann auf den Deklinationen $\delta = \varepsilon$ resp. $\delta = -\varepsilon$.

Beispiel. Wir betrachten wie im Beispiel des letzten Abschnittes eine ebenen, vertikalen Sonnenuhr bei einer geographischen Breite $\varphi = 47^\circ$, deren Zifferblatt um $D = 15^\circ$ aus der Südrichtung nach Westen abweicht. Die Gnomondistanz zum Zifferblatt sei $d = 1$.

Wir wollen die Stundenlinie für die wahre Ortszeit 9 Uhr bestimmen.

Die Sonnenuhrmatrix wurde im letzten Beispiel berechnet

$$M = \begin{bmatrix} 0.18929 & -0.96593 & -0.17651 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.70643 & 0.25882 & -0.65876 \end{bmatrix}$$

Ebenso das gnomonische Bild (dort \overrightarrow{c} genannt)

$$\overrightarrow{\text{nordpol}}' = p(\overrightarrow{\text{nordpol}}) = \begin{bmatrix} -0.26795 \\ 1.11020 \end{bmatrix} \quad (106)$$

Der Stundenwinkel um 9 Uhr WOZ beträgt $\tau = -45^\circ$. Damit wird

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.81686 \\ 0.48225 \\ 0.31651 \end{bmatrix}_Z \quad (107)$$

Die gnomonische Projektion

$$\vec{a}' = p(\vec{a}) = -\frac{1}{0.316511} \begin{bmatrix} 0.81686 \\ 0.482246 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.58082 \\ -1.52363 \end{bmatrix} \quad (108)$$

ist der Ortsvektor des Schnittpunktes A dieser Stundenlinie mit dem Zifferblattäquator. Einen Richtungsvektor gewinnen wir gemäss Gleichung 104 aus dem Normalenvektor auf die Stundenwinkelebene

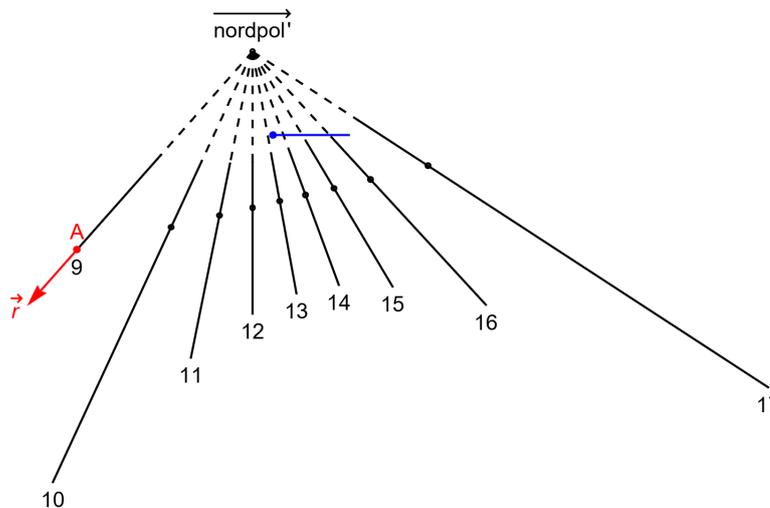
$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \sin(-45^\circ) \\ -\cos(-45^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.54917 \\ -0.48225 \\ -0.68254 \end{bmatrix}_Z \quad (109)$$

Dieser liefert den Richtungsvektor $\begin{bmatrix} -0.48225 \\ -0.54917 \end{bmatrix}$, den man noch auf die Länge 1 normieren kann

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -0.65984 \\ -0.751406 \end{bmatrix} \quad (110)$$

In der folgenden Figur wird das Resultat rot dargestellt und mit der ganzen Sonnenuhr ergänzt.

Abbildung 12. Vertikale, 15° nach Westen abweichende Sonnenuhr für die wahre Ortszeit bei der geographischen Breite 47°

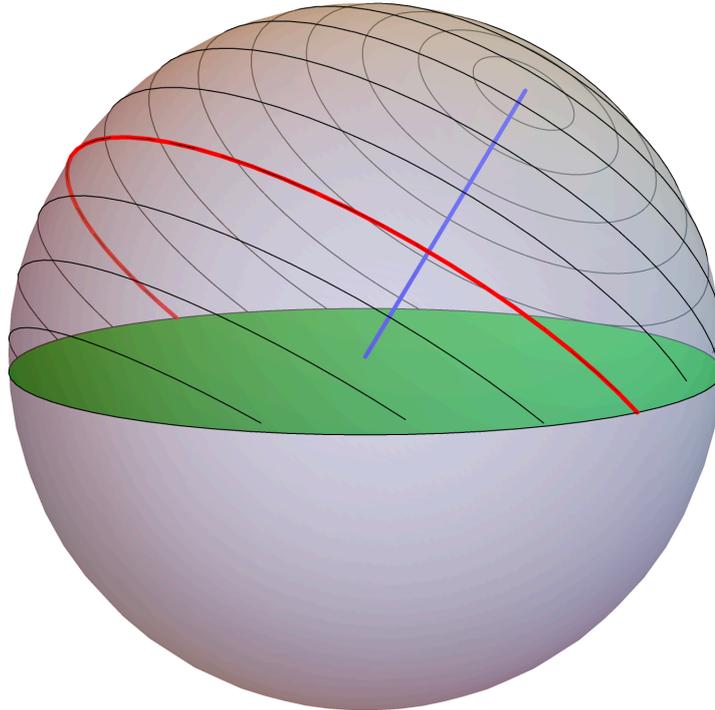


Die blaue Strecke stellt den umgeklappten Gnomon dar: Der Punkt am linken Ende markiert seinen Fusspunkt auf dem Zifferblatt, die Strecke selber seine Distanz über dem Zifferblatt. Von den Stundenlinien sind jene Teile durchgezogen gezeichnet, auf welche der Gnomonschatten im Verlauf des Jahres tatsächlich fällt. $\vec{nordpol}'$ ist die gnomonische Projektion des 3. Basisvektors des Äquatorsystems. Bei einer Polstabsonnenuhr wäre dieser Punkt der Fusspunkt des Polstabes.

Deklination und Datum

Die Kurven konstanter Deklination auf der Himmelskugel sind Kreise, deren Zentrum auf der Polachse liegt.

Abbildung 13. Die Deklinationslinien an der Himmelskugel



Die Kreise konstanter Deklination im Abstand von 10° auf der Himmelskugel. Ihr Zentrum liegt auf der blau gezeichneten Polachse. Rot: Der Himmelsäquator ($\delta = 0$).

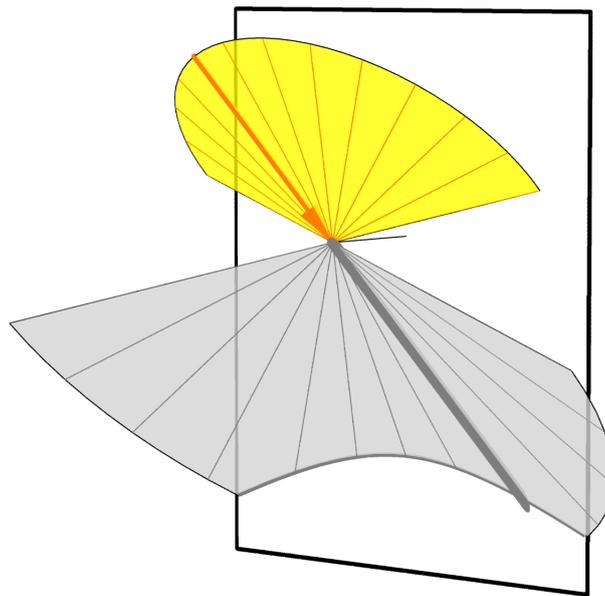
Obwohl sich die Sonnendeklination im Prinzip kontinuierlich verändert, kann man für Sonnenuhrenanwendungen vereinfachend annehmen, dass sie im Verlauf eines Tages konstant bleibt. Im Allgemeinen sind die Kurven konstanter Deklination keine Grosskreise, mit der einzigen Ausnahme, wenn die Deklination $\delta = 0$ ist. In diesem Fall ist die entsprechende Ebene die bereits besprochene Himmelsäquatorebene. Deshalb ist auf einem ebenen Zifferblatt einzig die Deklinationslinie der Tagundnachtgleiche, also die Linie des Eintritts der Sonne in die Tierkreise des Widders oder der Waage, eine Gerade. Sei nun also δ die Deklination am Mittag eines bestimmten Tages, die wir als konstant während des ganzen Tages betrachten. Die Richtung zur Sonne ist dann eine Funktion des Stundenwinkels τ , und die Parameterdarstellung der entsprechenden Himmelskurve lautet.

$$\vec{s}_\delta(\tau) = \vec{s}(\delta, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\delta)\cos(\tau) \\ \cos(\delta)\sin(\tau) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (111)$$

Ihre gnomonische Projektion auf das Zifferblatt heisst eine *Deklinationslinie*.

Nun betrachten wir den Sonnenstrahl, der auf den Gnomon trifft. Er bildet mit der Himmelsäquatorebene, welche den Gnomon enthält, den konstanten Winkel δ und beschreibt daher im Verlauf des Tages einen Kegel, dessen Spitze der Gnomon ist, und dessen Achse die durch den Gnomon verlaufende Polachse ist. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist somit $90^\circ - \delta$. Der Sonnenstrahl erzeugt auf der Gegenseite des Gnomons einen Schattenstrahl, der auf dem Gegenkegel des durch den Sonnenstrahl beschriebenen Kegels umläuft. Die Schnittkurve dieses Schattenkegels mit der Zifferblattebene stellt die Deklinationslinie dar, welche somit ein Kegelschnitt ist.

Abbildung 14. Kegel der täglichen Sonnenbahn und des Gnomonschattens



Der Sonnenstrahl beschreibt im Verlauf des Tages einen Kegelmantel (gelb). Der Gnomon erzeugt dadurch einen Schattenstrahl, der sich auf dem entsprechenden Gegenkegel (grau) bewegt und auf dem Zifferblatt eine Schattenspur in Form eines Kegelschnittes wirft.

Es gibt im Prinzip für jeden Tag des Jahres eine solche Deklinationslinie. Weil die Sonne während ihres Abstiegs im Herbsthalbjahr zwischen Sommer- und Wintersonnenwende denselben Deklinationsbereich überstreicht wie während ihres Aufstiegs im Frühlingshalbjahr, gehört aber, mit Ausnahme der beiden Sonnwendtage, jede Deklinationslinie zu zwei verschiedenen Tagen, zu je einem im Frühlingshalbjahr und einem im Herbsthalbjahr. Auf dem Zifferblatt einer Sonnenuhr kann aber aus Gründen der Übersichtlichkeit nur eine sehr eingeschränkte Anzahl von Deklinationslinien dargestellt werden.

Kalenderlinien

Wenn man jeweils für den ersten Tag jedes Monats die Deklinationslinie zeichnet, kann man auf der Sonnenuhr näherungsweise das Datum ablesen. Die entsprechenden Deklinationen für das Jahr 2018 sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 1. Sonnendeklinationen an den Monatsanfängen

Datum	δ
1. Januar	-22.89°
1. Februar	-17.04°
1. März	-7.51°
1. April	4.61°
1. Mai	15.13°
1. Juni	22.08°
1. Juli	23.09°
1. August	17.96°
1. September	8.12°
1. Oktober	-3.26°

Datum	δ
1. November	- 14.48°
1. Dezember	- 21.82°

Um eine bestimmte Datumslinie zu zeichnen, werden nun für die entsprechende Deklination δ und eine genügend grosse Anzahl Stundenwinkel die Schattenpunkte in Standardzifferblattkoordinaten berechnet. Wenn die Kurven von Hand gezeichnet werden sollen, so wird man nicht allzu viele Punkte berechnen und diese beim Zeichnen mit einem Kurvenlineal verbinden. Wird das Zifferblatt aber mittels eines computergesteuerten Plotters erzeugt, kann man viele Punkte nahe beieinander berechnen und dazwischen linear interpolieren.

Beispiel. An einem Standort mit der geografischen Breite $\varphi = 47^\circ$ soll ein genau nach Süden ausgerichteter Kalender nach dem oben beschriebenen Verfahren konstruiert werden. Die Gnomondistanz beträgt 1. Im folgenden wird demonstriert, wie die Datumslinie des 1. Mai bestimmt wird.

Die Sonnenuhrmatrix gemäss Gleichung 15 ist

$$M = T_{AZ}(47^\circ, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.73135 & 0 & -0.68200 \end{bmatrix} \quad (112)$$

Am 1. Mai beträgt die Deklination der Sonne $\delta = 15.13^\circ$. Bei einem Stundenwinkel von τ ist der Richtungsvektor zur Sonne in Äquatorkomponenten gemäss Gleichung 111

$$\vec{s}_\delta(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(15.13^\circ) \cos(\tau) \\ \cos(15.13^\circ) \sin(\tau) \\ \sin(15.13^\circ) \end{bmatrix}_A \quad (113)$$

Daraus die Zifferblattkomponenten

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \vec{s}_\delta(\tau) = \begin{bmatrix} -0.96534 \sin(\tau) \\ 0.65836 \cos(\tau) + 0.19089 \\ 0.70600 \cos(\tau) - 0.17801 \end{bmatrix}_Z$$

Die Sonne geht zu dieser Jahreszeit im Nordosten auf und steht dann noch hinter dem Zifferblatt. Kurz nach dem Eintritt der Sonne in das Zifferblatt ist der Gnomonschatten sehr weit vom Gnomonfusspunkt entfernt. Wir beginnen daher mit der Zeichnung erst bei einem Stundenwinkel von $\tau = -60^\circ$ und beenden sie bei $\tau = 60^\circ$.

Zur Illustration berechnen wir den ersten Schattenpunkt für $\tau = -60^\circ$. Die Zifferblattkomponenten des Sonnenrichtungsvektors sind

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_Z = \begin{bmatrix} -0.96534 \sin(-60^\circ) \\ 0.65836 \cos(-60^\circ) + 0.19089 \\ 0.70600 \cos(-60^\circ) - 0.17801 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83601 \\ 0.51020 \\ 0.20197 \end{bmatrix}_Z$$

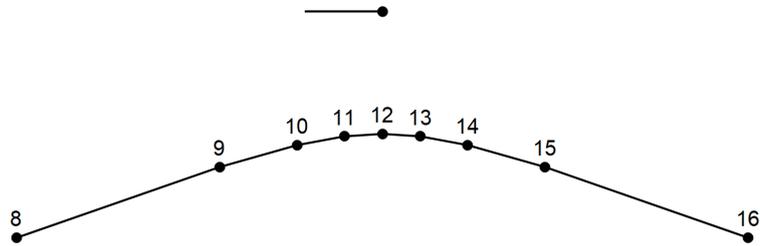
Die letzte Komponente ist positiv. Die Sonne steht also vor dem Zifferblatt. Die gnomonische Projektion liefert den Ortsvektor des Schattenpunktes

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.20197} \begin{bmatrix} 0.83601 \\ 0.51020 \end{bmatrix} \quad (114)$$

und der gesuchte Schattenpunkt ist daher

$$U = (-4.14, -2.53) \quad (115)$$

Für das folgende Bild wurden die Schattenpunkte ab $\tau = -60^\circ$ bis $\tau = 60^\circ$ in Schritten von 15° berechnet. Das sind die Punkte zu den vollen Stunden von 8 Uhr bis 16 Uhr. Dazwischen wurde linear interpoliert.

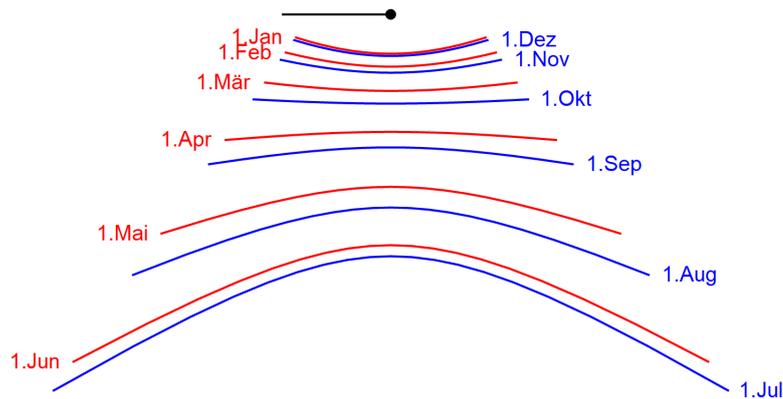


Die Datumslinie vom 1. Mai an einer vertikalen Südenuhr bei einer geographischen Breite von 47° .

Der Punkt oben in der Mitte markiert den Gnomonfußpunkt, die Strecke links davon ist die in die Zifferblattebene umgelegte Gnomondistanz.

Und hier noch der ganze Kalender:

Abbildung 15. Sonnenuhrkalender



Die Datumslinien für den 1. Tag jedes Monats an einer vertikalen Südenuhr bei einer geographischen Breite von 47° .

Tierkreisgrenzlinien

Auf historischen Sonnenuhren weit verbreitet sind die Deklinationslinien von jenen Tagen, an denen die Sonne in ein neues Tierkreiszeichen eintritt. Die zwölf Tierkreiszeichen sind Abschnitte von je 30° ekliptikaler Länge, deren Einteilung im Frühlingspunkt beginnt. Neben dem astrologischen Gesichtspunkt gibt es noch einen handfesten Grund für diese Einteilung auf Sonnenuhren: Die Deklinationslinien von jeweils zwei solchen Tierkreisgrenzen, je eine im Frühlingshalbjahr und eine im Herbsthalbjahr, fallen zusammen. Damit gibt es dann auf den Zifferblatt bloss sieben Linien, statt deren 12 wie beim Kalender mit den Monatsanfängen. Wenn man weiss, dass die Grenzen der Tierkreissektoren jeweils etwa um den 21. jedes Monats überschritten werden, so kann man auch mit Hilfe der Tierkreisgrenzen das ungefähre Datum abschätzen.

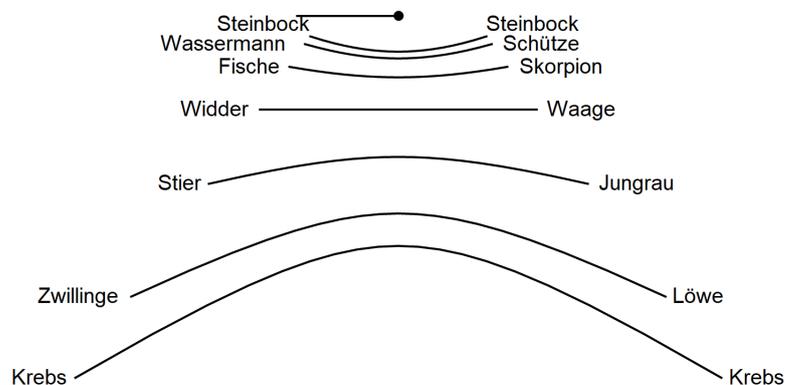
Wegen der Schaltjahresregel und kleinerer astronomischer Effekte kann sich das genaue Datum des Eintritts der Sonne in die einzelnen Tierkreissektoren um ± 1 Tag verschieben. Im Jahre 2018, in der Mitte eines Schaltjahreszyklus, trat die Sonne an den folgenden Daten in ein neues Tierkreiszeichen ein.

Tabelle 2. Eintritt der Sonne in ein neues Tierkreiszeichen

Tierkreis Aufsteigen		Tierkreis Absteigend		δ
Steinbock	21. Dez.			-23.43°
Wassermann	20. Jan.	Schütze	23. Nov.	-20.08°
Fische	18. Febr.	Skorpion	23. Okt.	-11.56°
Widder	20. März	Waage	23. Sept.	0°
Stier	20. April	Jungfrau	23. Aug.	11.56°
Zwillinge	21. Mai	Löwe	22. Juli	20.08°
		Krebs	21. Juni	23.43°

Die Linien der Tierkreisgrenzen werden auf analoge Art wie die Datumslinien der Monatsersten berechnet, einfach mit den entsprechenden Deklinationen δ .

Abbildung 16. Eintritt der Sonne in ein neues Tierkreiszeichen



Vertikale Süd- oder Norduhr bei einer geografischen Breite von 47° . Der Punkt oben in der Mitte markiert den Gnomonfußpunkt, die Strecke links davon die in die Zifferblattebene umgelegte Gnomondistanz.

Die Widder-Waage-Linie ist die einzige Gerade unter den Tierkreislinien. An diesen beiden Tagundnachtgleiche steht die Sonne in der Äquatorebene, welche die Himmelkugel in einem Grosskreis schneidet.

Sonnenaufgang, Sonnenuntergang und die Länge des lichten Tages

Auch die Zeitpunkte des Sonnenaufgangs und des Untergangs, und damit die Länge des lichten Tages, hängen von der Jahreszeit und damit von der Deklination der Sonne ab. Auch diese Informationen wurden auf reichhaltigen Sonnenuhren aus der Renaissance-Zeit, wie jene im Kapuzinerkloster Wesemlin in Luzern, die am Anfang dieser Abhandlung gezeigt wird, gerne dargestellt. Der Gepflogenheit der Zeit entsprechend wurden sie meist lateinisch benannt: *Ortus* für den Sonnenaufgang, *Occasus* für den Untergang sowie *Logitudo diei* für die Länge des (lichten) Tages.

Neben der Sonnendeklination δ spielt auch die geografische Breite φ des Standortes für diese Größen eine Rolle. Grundlegend ist der sogenannte *Halbtageswinkel* τ_{HT} , das ist der Stundenwinkel, den die Sonne in einem halben lichten Tag zurücklegt. Es gilt

$$\cos(\tau_{HT}) = -\tan(\delta)\tan(\varphi) \quad (116)$$

wobei wegen dem Wertebereich der Kosinusfunktion $-1 \leq \tan(\delta)\tan(\varphi) \leq 1$ sein muss. Für einen Standort mit positiver Breite φ (also auf der Nordhalbkugel der Erde) bedeute das, dass der Halbtageswinkel nur für Deklinationen

$$-(90^\circ - \varphi) \leq \delta \leq 90^\circ - \varphi$$

definiert ist.³ In diesem Falle ist dann

$$\tau_{HT} = \arccos(-\tan(\delta)\tan(\varphi)) \quad (117)$$

Mit dem Halbtageswinkel lässt sich nun die Länge des lichten Tages

$$T_1 = 2 \cdot \frac{\tau_{HT}}{15^\circ} \quad (118)$$

der Zeitpunkt des Sonnenaufganges

$$t_a = 12 - \frac{\tau_{HT}}{15^\circ} \quad (119)$$

sowie der Zeitpunkt des Sonnenunterganges

$$t_u = 12 + \frac{\tau_{HT}}{15^\circ} \quad (120)$$

in wahrer Ortszeit berechnen. Diese Zeiten beziehen sich auf den mathematischen Horizont, also ohne Berücksichtigung der Umgebung und der Landschaftsform und auch ohne Lichtbrechung in der Atmosphäre.

Man kann die Gleichung 116 auch umstellen: Für die Deklination erhält man

$$\tan(\delta) = -\frac{\cos(\tau_{HT})}{\tan(\varphi)} \quad (121)$$

Damit kann man die zu ganzzahigen Tageslängen gehörenden Sonnendeklinationen berechnen:

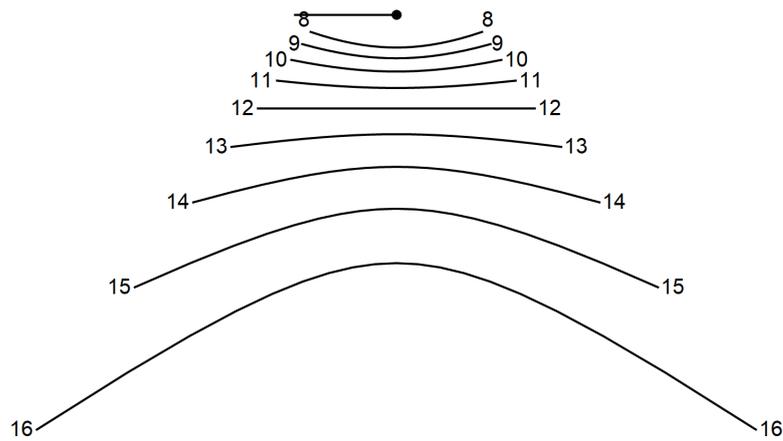
Tabelle 3. Auf- und Untergang der Sonne und Länge des lichten Tages an einem Standort mit geographischer Breite $\varphi = 47^\circ$

Aufgang	Untergang	Tageslänge	τ_{HT}	δ	Datum (2020)
8:00 Uhr	16:00 Uhr	8 h	60.0°	-25.00°	
7:30 Uhr	16:30 Uhr	9 h	67.5°	-19.64°	23.1. / 19.11
7:00 Uhr	17:00 Uhr	10 h	75.0°	-13.57°	12.2. / 29.10
6:30 Uhr	17:30 Uhr	11 h	82.5°	-6.94°	2.3. / 10.10
6:00 Uhr	18:00 Uhr	12 h	90.0°	0°	20.3. / 22.9.
5:30 Uhr	18:30 Uhr	13 h	97.5°	6.94°	7.4. / 4. 9.
5:00 Uhr	19:00 Uhr	14 h	105.0°	13.57°	25.4. / 16.8.
4:30 Uhr	19:30 Uhr	15 h	112.5°	19.64°	18.5. / 24.7.
4:00 Uhr	20:00 Uhr	16 h	120.0°	25.00°	

Auf der geographischen Breite 47° geht die Sonne in Wirklichkeit nie um 4 Uhr (WOZ) auf oder um 20 Uhr (WOZ) unter – die rechnerische Deklination von $\pm 25^\circ$ ist ja ausserhalb des durch die Ekliptikschiefe vorgegebenen natürlichen Bereiches der Sonnendeklination. Trotzdem werden diese beiden Linien oft gezeichnet, damit das Auge die Zwischenzeiten besser schätzen kann. Hier die Lineatur der lichten Tageslängen

³Auf der Südhalbkugel mit negativem φ gälte $90^\circ - \varphi \leq \delta \leq -(90^\circ - \varphi)$

Abbildung 17. Länge des lichten Tages

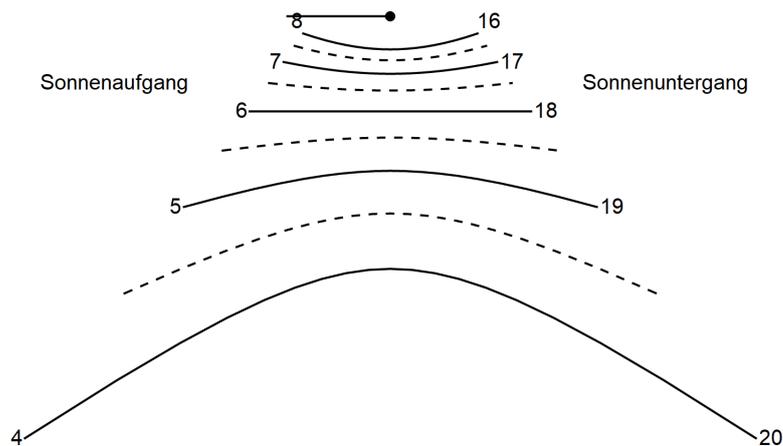


Vertikale Süd- und Norduhr bei einer geographischen Breite von 47° .

Der Punkt oben in der Mitte markiert den Gnomonfußpunkt, die Strecke links davon ist die in die Zifferblattebene umgelegte Gnomondistanz.

Dieselbe Lineatur kann man statt mit den Tageslängen auch mit den Auf- und Untergangszeit der Sonne beschriften. Das folgende Bild unterscheidet sich von obigem nur durch die Beschriftung.

Abbildung 18. Auf- und Untergangszeiten



Die Linien für die halben Stunden sind gestrichelt eingetragen

Babylonische und italienische Stunden

Die Bezeichnungen babylonische resp. italienische «Stunden» sind im Prinzip nicht korrekt, denn sie dauern genau gleich lang, wie die astronomischen Stunden, welche für die wahre Ortszeit verwendet werden. Sie werden bloss anders gezählt: die babylonischen nämlich seit dem Sonnenaufgang, die italienischen seit dem Sonnenuntergang des Vorabends. Korrekt wäre daher babylonische resp. italienische «Zählung» der Stunden.

Eine wesentliche Bedeutung haben offenbar die Zeitpunkte des Sonnenaufgangs und des -untergangs. Diese lassen sich durch den *Halbtageswinkel* τ_{HT} gemäss Gleichung 116 ausdrücken.

Babylonische Stunden

Die Stundenlinie für die babylonische Stunde t_B ist jene Kurve auf dem Zifferblatt, auf welche im Verlauf des Jahres der Gnomonschatten t_B Stunden nach dem Sonnenaufgang fällt. Zum Zeitpunkt des

Sonnenaufgangs beträgt der astronomische Stundenwinkel der Sonne $-\tau_{HT}$. Von diesem Zeitpunkt an wächst er stündlich um 15° . Nach t_B Stunden ist er somit um $\tau_B = t_B \cdot 15^\circ$ gewachsen. Wir nennen τ_B den *babylonischen Stundenwinkel*. Der astronomische Stundenwinkel beträgt zu dieser Zeit

$$\tau = \tau_B - \tau_{HT}$$

und der Einheitsvektor in Richtung zur Sonne ist zu diesem Zeitpunkt gemäss Gleichung 36

$$\vec{s}_B(\delta) = \vec{s}(\delta, \tau_B - \tau_{HT}) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_B - \tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_B - \tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (122)$$

wobei der Definitionsbereich auf der nördlichen Hemisphäre durch jenen des Halbtageswinkels gemäss Gleichung 116

$$-(90^\circ - \varphi) \leq \delta \leq 90^\circ - \varphi$$

eingeschränkt ist. Nun ist noch zu beachten, dass τ_{HT} gemäss Gleichung 117 ebenfalls von der Sonnendeklination abhängig ist. Zur babylonischen Zeit t_B hat die Kurve also in Abhängigkeit des Parameters δ die Darstellung

$$\vec{s}_B(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_B - \arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi))) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_B - \arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi))) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

Mit der Beziehung $\arccos(-x) = 180^\circ - \arccos(x)$ schliesslich

$$\vec{s}_B(\delta) = \begin{bmatrix} -\cos(\delta) \cos(\tau_B + \arccos(\tan(\delta) \tan(\varphi))) \\ -\cos(\delta) \sin(\tau_B + \arccos(\tan(\delta) \tan(\varphi))) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (123)$$

Es fragt sich nun, welcher Art Kurven die Stundenlinien auf dem Zifferblatt sind – diese Formel sieht ja ziemlich verknorkst aus. Überraschenderweise sind sie sehr einfach

Satz: Babylonische Stundenebene. Zu einer festen babylonischen Stunde t_B steht die Sonne bei jeder Deklination in jener Grosskreisebene, welche senkrecht zu einem Vektor steht, dessen Deklination gleich der geographischen Breite φ des Standortes und dessen Stundenwinkel gleich dem babylonischen Stundenwinkel $\tau_B = t_B \cdot 15^\circ$ ist. Der Einheitsnormalenvektor auf diese Grosskreisebene ist also

$$\vec{n}_B = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\tau_B) \\ \cos(\varphi) \sin(\tau_B) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_A \quad (124)$$

—

Wir nennen die genannte Grosskreisebene die *babylonische Stundenebene* von t_B .

Zum Beweis ist zu zeigen, dass die Sonnenrichtung $\vec{s}_B(\delta)$ zur babylonischen Stunde t_B bei jeder Sonnendeklination δ senkrecht zur Richtung \vec{n}_B steht, dass also

$$\vec{s}_B(\delta) \cdot \vec{n}_B = 0 \quad (125)$$

ist (\cdot bezeichnet das Skalarprodukt). Nun ist

$$\begin{aligned} \vec{s}'_B(\delta) \cdot \vec{n}_B &= \vec{s}'(\delta, \tau_B - \tau_{HT}) \cdot \vec{n}_B \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_B - \tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_B - \tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\tau_B) \\ \cos(\varphi) \sin(\tau_B) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_A \end{aligned}$$

Nach Anwendung der trigonometrischen Additionstheorem und elementaren Vereinfachungen erhält man

$$\vec{s}'_B(\delta) \cdot \vec{n}_B = \cos(\tau_{HT}) \cos(\delta) \cos(\varphi) + \sin(\delta) \sin(\varphi) \quad (126)$$

Der Halbtageswinkel erfüllt nun die Beziehung $\cos(\tau_{HT}) = -\tan(\delta) \tan(\varphi)$. Eingesetzt und vereinfacht erhält man

$$\vec{s}'_B(\delta) \cdot \vec{n}_B = 0 \quad (127)$$

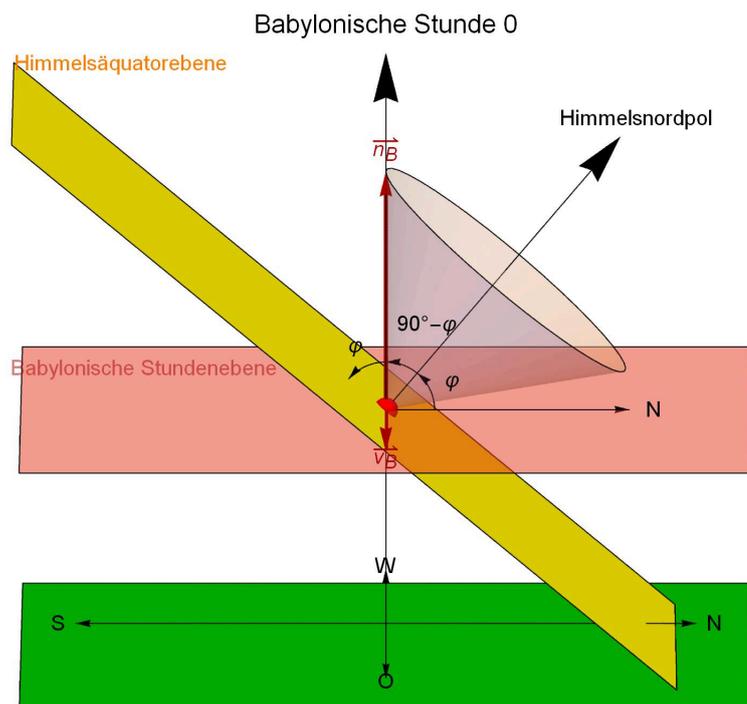
was zu beweisen war.

—

Grafisch kann man den Inhalt des Satzes so deuten: Der Normalenvektor \vec{n}_B dreht im Verlauf des Tages mit gleichförmiger Geschwindigkeit von 15° pro Stunde, wobei er mit der Äquatorebene den konstanten Winkel φ bildet. Der Repräsentant von \vec{n}_B , dessen Anfangspunkt im Gnomon liegt, bewegt sich also im Verlauf eines Tages auf dem Mantel eines Kegels, dessen Spitze der Gnomon und dessen Achse die Polachse ist. Der halbe Öffnungswinkel des Kegels beträgt daher $90^\circ - \varphi$.

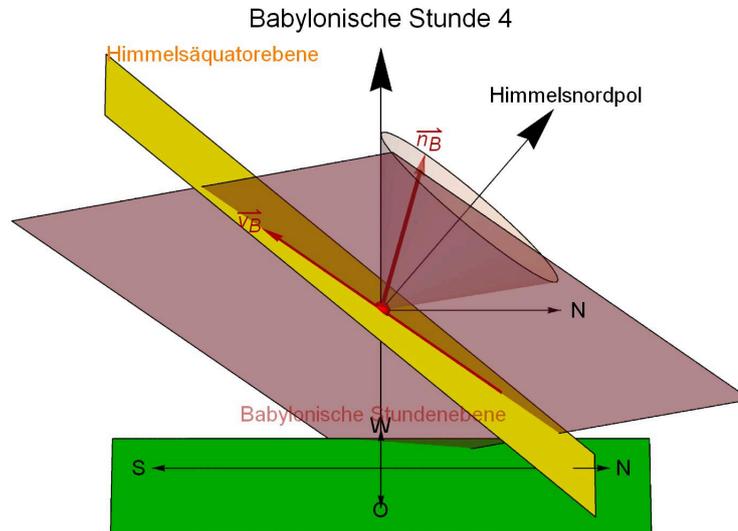
Zur babylonischen Stunde 0, zum Zeitpunkt des Sonnenaufgangs also, befindet sich die Sonne in der Horizontebene. Der Normalenvektor ist dann zum Zenit gerichtet.

Abbildung 19. Babylonische Stundenebene bei Sonnenaufgang



Wenn dann die Sonne höher steigt, dreht \vec{n}_B mit einer Geschwindigkeit von 15° pro Stunde auf seinem Kegelmantel, und senkrecht zu \vec{n}_B dreht synchron die babylonische Stundenebene. Vier Stunden später sieht die Szene dann so aus:

Abbildung 20. Babylonische Stundeneben 4 Stunden nach Sonnenaufgang



Die babylonischen Stundenlinien auf einem ebenen Zifferblatt

Zu einer festen babylonischen Stunde t_B steht die Sonne also bei jeder Deklination in einer Grosskreisebene. Auf Grund von Satz gilt daher

Korollar. Auf einem ebenen Zifferblatt sind die babylonischen Stundenlinien Geradenstücke.

—

Die Stundenlinie zur babylonischen Zeit t_B auf einem ebenen Zifferblatt ist ein Stück der Schnittgeraden der babylonischen Stundenebene mit der Zifferblattebene.

Einen Punkt der Schnittgeraden erhält man durch eine spezielle Wahl der Deklination in der Formel Gleichung 123, zum Beispiel $\delta = 0$, also die Sonnenrichtung anlässlich der beiden Tagundnachtgleichen.

$$\vec{v}_B = \vec{s}_{t_B}(0) = \begin{bmatrix} -\cos(\tau_B + 90^\circ) \\ -\sin(\tau_B + 90^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \sin(\tau_B) \\ -\cos(\tau_B) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (128)$$

Die Zifferblattkomponenten sind

$$\vec{v}_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \sin(\tau_B) \\ -\cos(\tau_B) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (129)$$

wobei M die Sonnenuhrmatrix ist. Falls $v_3 > 0$ gilt, so liefert die gnomonische Projektion auf die Zifferblattebene gemäss Gleichung 66

$$p(\vec{v}_B) = -\frac{d}{v_3} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_Z \quad (130)$$

den Schnittpunkt V der Stundenlinie mit dem Zifferblattäquator, wobei d ist die Distanz des Gnomons von der Zifferblattebene ist. Einen Richtungsvektor der babylonischen Stundenlinie gewinnt man aus dem Normalenvektor \vec{n}_B auf die babylonische Stundenebene.

$$\vec{n}_B = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\tau_B) \\ \cos(\varphi) \sin(\tau_B) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_A \quad (131)$$

Daraus gemäss Gleichung 78

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{bmatrix}_Z \quad (132)$$

Beispiel 6. Als Beispiel wollen wir die babylonische Stundenlinie zu $t_B = 4$, entsprechend $\tau_B = 60^\circ$ auf einem vertikalen Südzifferblatt an einem Ort mit der geographischen Breite $\varphi = 47^\circ$ berechnen.

Die numerischen Rechnungen werden in Standardzifferblatt-Koordinaten durchgeführt. Die Sonnenuhrmatrix für die geografische Breite $\varphi = 47^\circ$, die Abweichung $D = 0^\circ$ und die Neigung $I = 0^\circ$ wurde schon in Gleichung 62 berechnet.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73136 \\ 0.73136 & 0 & -0.68200 \end{bmatrix} \quad (133)$$

Die Äquatorkomponenten der Sonnenrichtung anlässlich der Tagundnachtgleichen für $\tau_B = 60^\circ$ sind

$$\vec{v}_B = \begin{bmatrix} 0.86603 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

die Zifferblattkomponenten daher

$$\vec{v}_B = M \cdot \begin{bmatrix} 0.86603 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.59063 \\ 0.63337 \end{bmatrix}_Z$$

Damit kann man nun den Ortsvektor des Schnittpunktes V der Stundenlinie mit dem Zifferblattäquator bestimmen.

$$\vec{v} = p(\vec{v}_B) = \begin{bmatrix} -0.78943 \\ -0.93252 \end{bmatrix}_Z$$

Zur Bestimmung des Richtungsvektors der babylonischen Stundenlinie braucht man den Normalenvektor der babylonischen Stundenebene. Gemäss Gleichung 131 sind seine Äquatorkomponenten für $\tau_B = 60^\circ$ und $\varphi = 47^\circ$

$$\vec{n}_B = \begin{bmatrix} 0.34100 \\ 0.59063 \\ 0.73135 \end{bmatrix}_A \quad (134)$$

und die Zifferblattkomponenten

$$\vec{n}_B = M \cdot \begin{bmatrix} 0.34100 \\ 0.59063 \\ 0.73135 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -0.59063 \\ 0.76744 \\ -0.24939 \end{bmatrix}_Z \quad (135)$$

Aus ihm gewinnt man gemäss Gleichung 78 die Zifferblattkomponenten des Richtungsvektors

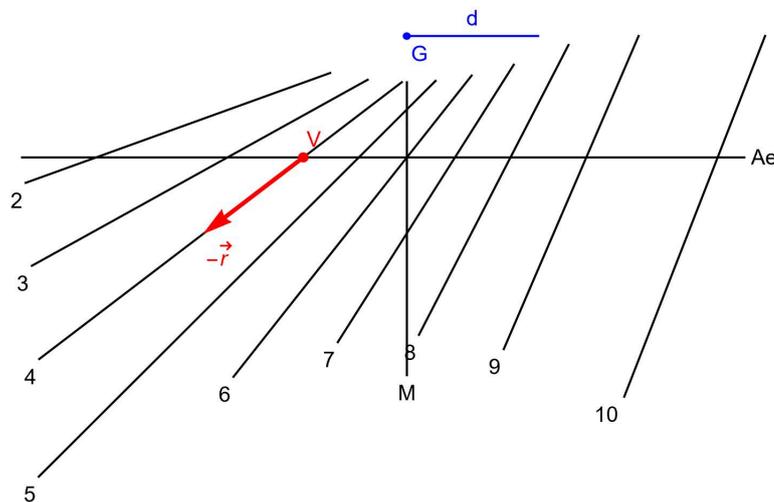
$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0.76744 \\ 0.59063 \end{bmatrix}_Z \quad (136)$$

oder normiert

$$\vec{r}_N = \begin{bmatrix} 0.792478 \\ 0.60990 \end{bmatrix}_Z \quad (137)$$

Das Ergebnis ist in der folgenden Figur in einer ergänzten Sonnenuhr für babylonische Stunden dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde anstelle des berechneten Richtungsvektors \vec{r}_N sein Gegenvektor gezeichnet.

Abbildung 21. Eine babylonische vertikale Südsonnenuhr bei der geographischen Breite 47°



Der Gnomon befindet sich senkrecht vor der Stelle des Punktes oben in der Mitte. Die vom Punkt aus nach rechts verlaufende Strecke gibt die Distanz des Gnomons vom Zifferblatt an. Die vertikale, mit "M" bezeichnete Gerade ist die Mittagslinie, die horizontale mit "Ae" bezeichnete Gerade die Äquinoktiallinie.

Italienische Stunden

Die Stundenlinie für die italienische Stunde t_1 ist jene Kurve auf dem Zifferblatt, auf welche im Verlauf des Jahres der Gnomonschatten t_1 Stunden nach dem letzten Sonnenuntergang fällt. Die Überlegungen sind analog zu jenen für die babylonischen Stunden: Zum Zeitpunkt des Sonnenuntergangs beträgt der astronomische Stundenwinkel der Sonne τ_{HT} , und t_1 Stunden später daher

$$\tau = \tau_{HT} + t_1 - 360^\circ$$

wobei $\tau_1 = t_1 \cdot 15^\circ$ der seit dem letzten Sonnenuntergang zurückgelegte Stundenwinkel ist; wir wollen ihn den *italienischen Stundenwinkel* nennen. Die Subtraktion von 360° trägt dem Umstand Rechnung, dass sich die Berechnung auf den Sonnenuntergang des Vortages bezieht. Der Einheitsvektor in Richtung zur Sonne ist gemäss Gleichung 36

$$\vec{s}_t(\delta) = \vec{s}(\delta, \tau_{HT} + t_1 - 360^\circ) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_{HT} + t_1 - 360^\circ) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_{HT} + t_1 - 360^\circ) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (138)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_1 + \tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_1 + \tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_1 + \arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi))) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_1 + \arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi))) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

für $-(90^\circ - \varphi) \leq \delta \leq 90^\circ - \varphi$.

Analog zu den babylonischen Stunden gilt

Satz: Italienische Stundenebene. Zu einer festen italienischen Stunde t_1 steht die Sonne bei jeder Deklination in einer Grosskreisebene. An einem Standort mit der geographischen Breite φ steht diese senkrecht zur Richtung, deren Deklination gleich φ und deren Stundenwinkel gleich $\tau_1 = t_1 \cdot 15^\circ$ ist.

Der Einheitsnormalenvektor auf diese Ebene hat also die Form

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\tau_1) \\ \cos(\varphi) \sin(\tau_1) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_A \quad (139)$$

—

τ_1 ist der Stundenwinkel, den die Sonne seit dem letzten Untergang zurückgelegt hat. Wir nennen ihn den *italienischen Stundenwinkel* und die genannte Grosskreisebene die *italienische Stundenebene* von t_1 .

Zum Beweis ist zu zeigen, dass die Sonnenrichtung $\vec{s}_1(\delta)$ zur italienischen Stunde t_1 , unabhängig von der Deklination δ , senkrecht zur Richtung \vec{n}_1 steht, dass also $\vec{s}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0$ ist. Die Rechnung verläuft völlig analog zum Beweise des entsprechenden Satzes für die babylonischen Stunden.

Aus Satz folgt

Korollar. Auf einem ebenen Zifferblatt sind die italienischen Stundenlinien Geradenstücke.

—

Die Parallele zum entsprechenden Satz über babylonische Stunden ist offensichtlich: Der Normalenvektor der italienischen Stundenebene dreht auf demselben Kegel wie jener der babylonischen. Der Unterschied: In der Abbildung 19, „Babylonische Stundenebene bei Sonnenaufgang“ entspricht die Anfangsstellung nicht mehr dem Sonnenaufgang, sondern dem Sonnenuntergang, und die Vektoren tragen den Index I statt B.

Die italienischen Stundenlinien auf einem ebenen Zifferblatt

Die Stundenlinie zur italienischen Zeit t_1 auf dem Zifferblatt ist ein Stück der Schnittgeraden der italienischen Stundenebene mit der Zifferblattebene.

Einen Punkt der Schnittgeraden erhält man durch eine spezielle Wahl der Deklination in der Formel Gleichung 138 für die Sonnenrichtung, zum Beispiel $\delta = 0$, also jene anlässlich der beiden Tagundnachtgleichen. So erhält man die Äquatorkomponenten

$$\vec{s}_1(0) = \begin{bmatrix} \cos(\tau_1 + 90^\circ) \\ \sin(\tau_1 + 90^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -\sin(\tau_1) \\ \cos(\tau_1) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (140)$$

und daraus die Zifferblattkomponenten

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\tau_1) \\ \cos(\tau_1) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (141)$$

Falls nun $v_3 > 0$ ist, so ist gemäss Gleichung 66

$$p(\vec{v}_1) = -\frac{d}{v_3} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_Z \quad (142)$$

der Ortsvektor des Schnittpunktes V der Stundenlinie mit dem Zifferblattäquator. d ist die Distanz des Gnomons von der Zifferblattebene. Einen Richtungsvektor der italienischen Stundenlinie gewinnt man aus dem Normalenvektor auf die babylonische Stundenebene.

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cos(\tau_1) \\ \cos(\varphi) \sin(\tau_1) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_A \quad (143)$$

Daraus gemäss Gleichung 78

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{bmatrix}_Z \quad (144)$$

Beispiel 7. Als Beispiel bestimmen wir die italienische Stundenlinie zu $t_1 = 14$, entsprechend $\tau_1 = 210^\circ$ auf derselben Sonnenuhr wie im Beispiel zu den babylonischen Stunden.

Die Sonnenuhrmatrix können wir übernehmen

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.73135 & 0 & -0.68200 \end{bmatrix} \quad (145)$$

Die Äquatorkomponenten der Sonnenrichtung anlässlich der Tagundnachtgleichen sind

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(210^\circ) \\ \cos(210^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.86603 \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

$$\vec{v}_1 = M \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.86603 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.86603 \\ 0.34100 \\ 0.36568 \end{bmatrix}_Z$$

Der Ortsvektor des Schnittpunktes V mit dem Zifferblattäquator ist

$$\vec{v} = p(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} -2.36828 \\ -0.93252 \end{bmatrix}_Z$$

Die Äquatorkomponenten des Normalenvektor der Stundenebene sind

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} -0.59063 \\ -0.34100 \\ 0.73135 \end{bmatrix}_A \quad (146)$$

und seine Zifferblattkomponenten daher

$$\vec{n}_1 = M \cdot \begin{bmatrix} -0.59063 \\ -0.34100 \\ 0.73135 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.34100 \\ 0.13207 \\ -0.93074 \end{bmatrix}_Z \quad (147)$$

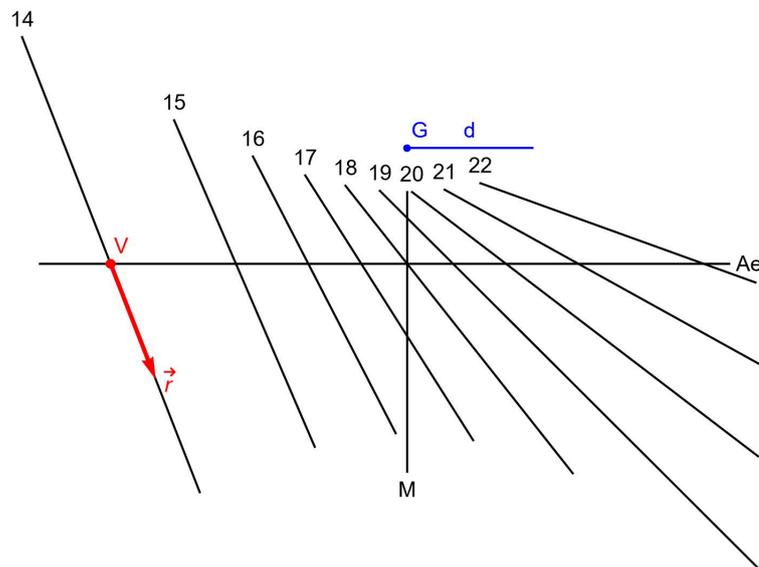
Ein Richtungsvektor ist daher

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0.13207 \\ -0.34100 \end{bmatrix}_Z \quad (148)$$

—

Und hier die graphische Interpretation mit vervollständigtem Zifferblatt der italienischen Sonnenuhr.

Abbildung 22. Eine italienische, vertikale Südsonnenuhr bei der geographischen Breite 47°



Der Gnomon befindet sich senkrecht vor der Stelle des Punktes oben in der Mitte. Die vom Punkt aus nach rechts verlaufende Strecke gibt die Distanz des Gnomons vom Zifferblatt an. Die vertikale, mit "M" bezeichnete Gerade ist die Mittagslinie, die horizontale mit "Ae" bezeichnete Gerade ist der Zifferblattäquator.

Zusammenhang zwischen italienischen und babylonischen Stundenlinien

Es fällt auf, dass die Normalenvektoren der babylonischen und der italienischen Stundenebene gemäss Satz: Babylonische Stundenebene resp. Satz: Italienische Stundenebene formal identisch sind. Sie unterscheiden sich bloss durch den Stundenwinkel, der zu verwenden ist. Im ersten Falle ist es jener, den die Sonne seit dem letzten Sonnenaufgang, im zweiten jener, welchen sie seit dem letzten Untergang zurückgelegt hat. Das heisst, dass die Grosskreisebene zur babylonischen Stunde t gleich jener zur italienischen Stunde t ist, was wiederum bedeutet, dass die Stundenlinien im Prinzip identisch sind und sich nur durch die Nummerierung unterscheiden. So ist zum Beispiel die Stundenlinie für die babylonische Stunde 4 identisch mit der virtuellen italienischen Stundenlinie 4; virtuell darum, weil vier Stunden nach Sonnenuntergang die Sonne niemals scheint.

Satz

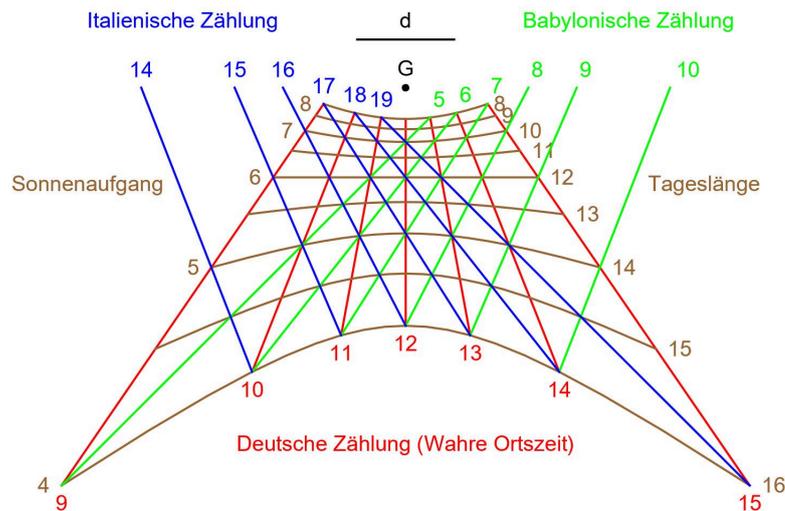
Die Stundenlinie für die babylonische Stunde t und jene für die italienische Stunde t liegen auf derselben Geraden.

Diese Aussage darf nicht missverstanden werden: Natürlich sind zu einem bestimmten Zeitpunkt die babylonischen und die italienischen Stunden nicht gleich! Aber die Stundenlinie für die babylonische Stunde 5 zum Beispiel liegt auf einer Geraden, auf welcher auch die Linie für die italienische Stunde 5 liegt. Letztere fällt aber in die Nacht und kann daher von einer Sonnenuhr nicht angezeigt werden.

Eine «Grande Complication»

Wir fassen die bisher besprochenen Indikation zu einer Multifunktions-Sonnenuhr zusammen.

Abbildung 23. Vertikale Südsonnenuhr bei der geographischen Breite 47°



Der Gnomon befindet sich senkrecht vor der Stelle des schwarzen Punktes oben in der Mitte. Darüber ist die Gnomondistanz markiert.

Die Stundenlinien der astronomischen (rot), der italienischen (blau) und der babylonischen (grün) Zählung bilden zusammen mit den Deklinationslinien für die Tageslänge (braun) ein Netz mit gemeinsamen Kreuzungspunkten, welche vielfältige Zusammenhänge sichtbar machen. Als Beispiel diene der schwarz eingekreiste Knoten: In ihm schneiden sich die Deklinationslinie für die Tageslänge 14 Stunden sowie Linie für astronomisch 10 Uhr, babylonisch 5 Uhr und italienisch 15 Uhr.

- Die italienische Stundenzahl erhält man, indem man die astronomische um die halbe Nachtlänge vermehrt. Da die Tagesslänge 14 Stunden beträgt, dauert die Nacht 10 Stunden und die halbe Nacht damit 5 Stunden. Nach italienischer Zählart ist es daher $10 + 5 = 15$ Uhr. Allgemein gilt

$$t_I = t_A + \frac{24 - t_L}{2} = t_A - \frac{t_L}{2} + 12$$

- Die babylonische Stundenzahl erhält man, indem man die astronomische um die halbe Nachtlänge vermindert. Nach babylonischer Zählart ist es daher $10 - 5 = 5$ Uhr. Allgemein

$$t_B = t_A - \frac{24 - t_L}{2} = t_A + \frac{t_L}{2} - 12$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von t_L .

$$t_A = \frac{t_B + t_I}{2} \tag{149}$$

Satz. Die astronomische Stundenzahl ist das arithmetische Mittel der babylonischen und der italienischen Stundenzahl.

Zwei Spezialfälle dieser Formel sind bemerkenswert, denn sie bilden die Grundlage für ein altbekanntes Verfahren zur Konstruktion von italienischen oder babylonischen Sonnenuhren, welche sich auf eine nördlich der Alpen verwendete Sonnenuhr für die wahre Ortszeit stützen.

1. Bei *Sonnenaufgang* ist die babylonische Stunde $t_B = 0$ und daher gilt

$$t_A = \frac{t_1}{2}$$

Zu diesem Zeitpunkt ist die Sonnenrichtung horizontal, und der Schatten des Gnomons liegt in der horizontalen Ebene, welche den Gnomon enthält. Das bedeutet, dass der Schatten des Gnomons auf dem Zifferblatt auf die Schnittgeraden dieser Ebene mit der Zifferblattebene fällt. Diese Schnittgerade werden wir im Folgenden den *Zifferblatthorizont* nennen.

Diese Überlegungen bedeuten nun, dass die Linie zur italienischen Stunde t_1 den Zifferblatthorizont im selben Punkt schneidet wie die Linie für die astronomische Stunde $\frac{t_1}{2}$.

Da die italienischen Stundenlinien Geradenstücke sind, brauchen wir nur noch einen zweiten Punkt. Dafür bietet sich ihr Schnittpunkt mit dem Zifferblattäquator an. An den beiden Tagenundnachtgleichen dauert halbe Nacht 6 Stunden. An diesen Tagen ist also die astronomische Zeit stets 6 Stunden kleiner als die italienische.

$$t_A = t_1 - 6$$

Die Zifferblattlinie für die italienische Stunde t_1 schneidet somit den Zifferblattäquator im Schnittpunkt der Linie für die astronomischen Zeit $t_1 - 6$.

Als Beispiel diene die Stundenlinie für die italienische Stunde 16. Diese ist ein Geradenstück, welches den Zifferblatthorizont im Schnittpunkt mit der astronomischen Stundenlinie $t_A = \frac{16}{2} = 8$ und den Zifferblattäquator im Schnittpunkt mit der Stundenlinie für die astronomischen Stunde $t_A = 16 - 6 = 10$ schneidet.

2. Bei *Sonnenuntergang* desselben Tages zeigt die italienische Sonnenuhr $t_1 = 24$ und daher gilt gemäss Gleichung 149

$$t_A = \frac{t_B}{2} + 12$$

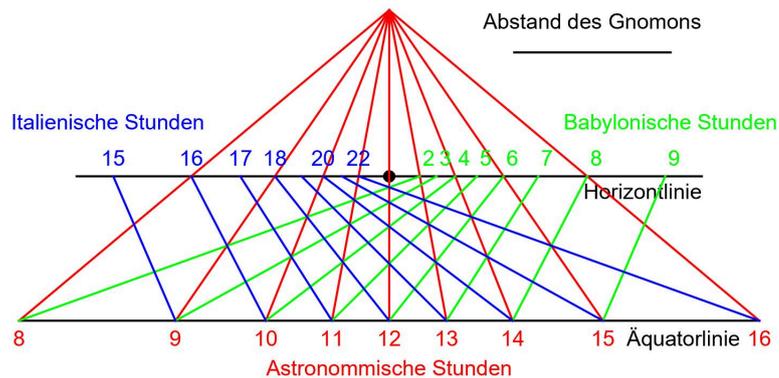
Auch bei Sonnenuntergang fällt der Gnomonschatten auf den Zifferblatthorizont. Das bedeutet, dass die Zifferblattlinie zur babylonischen Stunde t_B den Zifferblatthorizont im selben Punkt schneidet, wie die Linie zur astronomischen Stunde $\frac{t_B}{2} + 12$.

Da anlässlich der Tagenundnachtgleichen die astronomische Stundenzahl um 6 grösser ist als die babylonische, schneidet die Zifferblattlinie zur babylonischen Stunde t_B den Zifferblattäquator im selben Punkt wie die astronomische Stundenlinie $t_B + 6$.

Betrachten wir die Stundenlinie für die babylonische Stunde 4. Sie schneidet den Zifferblatthorizont im Schnittpunkt mit der Linie für die astronomische Stunde $\frac{4}{2} + 12 = 14$ und den Zifferblattäquator im Schnittpunkt mit der Linie für die astronomische Stunde $4 + 6 = 10$

Diese Zusammenhänge werden in der folgenden Figur einer vertikalen Süduhr bei der geographischen Breite 47° leicht überprüfbar.

Abbildung 24. Zusammenhang der drei Zählarten



Ausschnitt aus einer vertikalen Süduhr bei der geographischen Breite 47° . Der Gnomon befindet sich senkrecht vor der Stelle des schwarzen Punktes im Schnittpunkt der Horizontlinie mit der Mittagslinie. Oben rechts ist die Gnomondistanz markiert.

Und hier noch ein historisches Beispiel. Eine wahre «Grande Complication» der Sonnenuhrenbaukunst aus der Zeit der Renaissance!

Abbildung 25. Sonnenuhr aus dem Jahre 1602 im Kapuzinerkloster Wesemlin in Luzern



Sie zeigt mit dem Schatten des Polstabes die astronomischen Stunden und mit dem Schatten eines aufgesetzten Ringes die Tierkreiszeichen, die Tageslänge, die italienischen Stunden, den Aufgang und den Untergang der Sonne, die Stunden seit Sonnenaufgang (babylonische Stunden), die Stunden bis zum Sonnenuntergang sowie die morgendlichen Gebetsstunden an. (Bild Adrian Müller)

Temporalstunden

Vor der Erfindung der mechanischen Räderuhr etwa im 14. Jahrhundert pflegte man den Zeitraum von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in zwölf gleichlange Abschnitte einzuteilen. Die Dauer dieser sogenannten Temporalstunden oder kanonischen Stunden variiert also im Verlauf des Jahres mit der Tageslänge erheblich und ist auch von der geographischen Breite φ des Ortes abhängig. Wie bei den babylonischen und den italienischen Stunden spielt hier der Halbtageswinkel τ_{HT} , der durch die Beziehung Gleichung 116 definiert ist, eine Schlüsselrolle. Mit ihm kann man den astronomische Stundenwinkel zur temporalen Stunde t_T berechnen: Seit ihrem Aufgang überstreicht die Sonne pro Temporalstunde einen Stundenwinkel von einem Zwölftel der lichten Tageslänge.

$$\tau_T = t_T \cdot \frac{2\tau_{HT}}{12} = t_T \cdot \frac{\tau_{HT}}{6}$$

Wir nennen ihn den *temporalen Stundenwinkel*. Der astronomische Stundenwinkel wird vom wahren Mittag aus gerechnet und beträgt demnach

$$\tau = -\tau_{HT} + \tau_T = -\tau_{HT} + t_T \cdot \frac{\tau_{HT}}{6} = \tau_{HT} \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right)$$

mit

$$\tau_{HT} = \arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi)) \quad (150)$$

Damit wird der Einheitsvektor in Richtung zur Sonne zur temporalen Zeit t_T

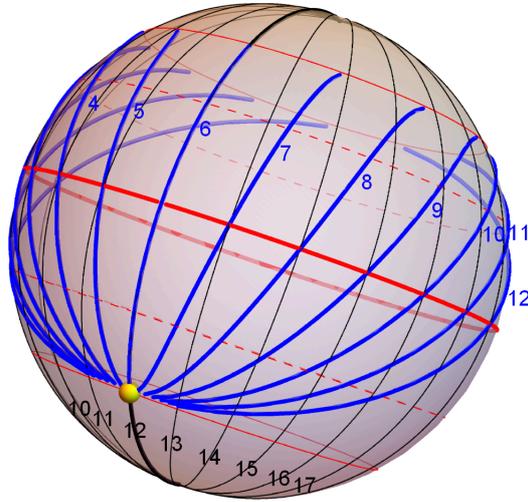
$$\vec{s}_T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_T - \tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_T - \tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos\left(\tau_{HT} \left(\frac{t_T}{6} - 1\right)\right) \\ \cos(\delta) \sin\left(\tau_{HT} \left(\frac{t_T}{6} - 1\right)\right) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (151)$$

$$\vec{s}_T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos\left(\arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi)) \left(\frac{t_T}{6} - 1\right)\right) \\ \cos(\delta) \sin\left(\arccos(-\tan(\delta) \tan(\varphi)) \left(\frac{t_T}{6} - 1\right)\right) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

für $-(90^\circ - \varphi) \leq \delta \leq 90^\circ - \varphi$.

Auf der Himmelskugel sieht das dann so aus

Abbildung 26. Kurven konstanter Temporalzeit auf der Himmelskugel



Blick von aussen auf die Himmelskugel. Die Stundenkurven der Temporalzeit sind blau, jene der wahren Ortzeit schwarz und die Deklinationslinien rot gezeichnet, und zwar jene zu $\delta = 0$ und $\delta = \pm (90^\circ - \varphi)$ durchgezogen, jene zu $\delta = \pm \varepsilon$ gestrichelt.

Offensichtlich sind die Temporalcurven in der Regel keine Grosskreise der Himmelskugel (Siehe [Aulenbacher]). Ausnahmen bilden die Kurven für die Temporalstunden 0, 6 und 12.

- Zur temporalen Stunden 0, also bei Sonnenaufgang, ist der temporale Stundenwinkel gleich 0. Dann gilt

$$\vec{s}_T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(-\tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(-\tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_{HT}) \\ -\cos(\delta) \sin(\tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

Zur temporalen Stunden 12, also bei Sonnenuntergang, ist der temporale Stundenwinkel gleich $2\tau_{HT}$. Dann ist

$$\vec{s}_T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

In beiden Fällen steht die Sonne in der Horizontebene, welche die Himmelskugel in einem Grosskreis schneidet. Die Horizontebene steht senkrecht zur Zenitrichtung. Der Einheitsvektor in diese Richtung \vec{n}_{T0} hat bei der geographischen Breite φ die Äquatorkomponenten

$$\vec{n}_{T0} = T_{HA}(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}_A$$

wobei $T_{HA}(\varphi)$ die Transformationsmatrix von Horizont- in Äquatorkomponenten gemäss Gleichung 8 ist.

- Zur 6. temporalen Stunde ist der temporale Stundenwinkel gleich dem Halbtageswinkel $\tau_T = \tau_{HT}$. Nach Gleichung 151 gilt dann

$$\vec{s}_T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(0) \\ \cos(\delta) \sin(0) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A$$

Das ist der Einheitsvektor in die Richtung mit der Deklination δ und dem astronomischen Stundenwinkel 0, also die Richtung am wahren Mittag – wie zu erwarten! Der Richtungswinkel liegt also in der Meridianebene, welche senkrecht auf \vec{w}_{est} steht. Letzterer ist der 2. Basisvektor des Äquatorkoordinatensystems, hat also die Komponenten

$$\vec{w}_{T6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Einer speziellen Betrachtung wert sind noch die temporalen Stunden anlässlich der beiden Tagundnachtgleichen:

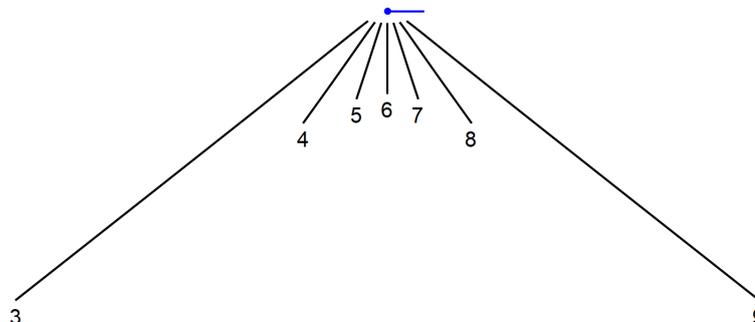
- An diesen Tagen ist die Sonnendeklination 0. Der lichte Tag dauert dann 12 Stunden, der halbe also 6 Stunden, womit der Halbtageswinkel $\tau_{HT} = 6 \cdot 15^\circ = 90^\circ$ ist und daher

$$\vec{v}_T = \vec{s}_T(0) = \begin{bmatrix} \cos(\tau_T - 90^\circ) \\ \sin(\tau_T - 90^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A \quad (152)$$

Das ist der Einheitsvektor in der Richtung mit der Deklination 0 und dem Stundenwinkel $\tau = \tau_T - 90^\circ$. Der astronomische Stundenwinkel ist also einfach um 90° kleiner als der temporale. Die temporalen Stunden sind an diesen beiden Tagen gleich lang wie die Stunden der wahren Ortszeit. Aus diesem Grunde nennt man letztere, um sie von den über's Jahr variablen temporalen Stunden explizit abzugrenzen, auch *äquinoktiale Stunden*.

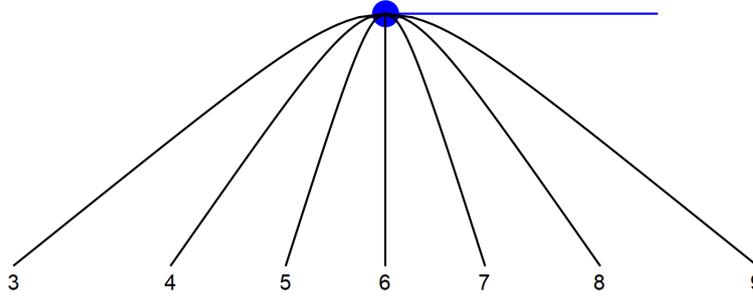
Wie sehen nun die Linien von temporalen Stunden auf einem ebenen Zifferblatt aus? In der folgenden Abbildung sind die Linien 3 bis 9 für ein vertikales Südzipferblatt bei der geographischen Breite von 47° gezeichnet.

Abbildung 27. Eine vertikale Südsonnenuhr für Temporalstunden bei der geographischen Breite 47°



Der Gnomon befindet sich senkrecht vor der Stelle des blauen Punktes oben in der Mitte. Die vom Punkt aus nach rechts verlaufende Strecke gibt die Distanz des Gnomons vom Zifferblatt an. Die Stundenlinien sind für Sonnendeklinationen von $-\varepsilon$ bis ε (= Ekliptikschiefe) gezeichnet.

Die Stundenlinien scheinen Geradenstücke zu sein – aber der Schein trügt! Die Himmelskurven konstanten Temporalwinkels sind ja keine Grosskreise. Wenn man die Stundenlinien in einem grösseren Abschnitt für virtuelle Deklinationen zeichnet, wird diese Tatsache offensichtlich.



Hier wurde die Sonnendeklination über den durch die Ekliptischeiefe vorgegebenen Bereich hinaus erweitert, von 0° bis zur virtuellen Deklination -43° .

Dass alle, über den natürlichen Deklinationbereich der Sonne hinaus verlängerten Temporalstunden-Linien in einem Punkt zusammenlaufen, hat seinen Grund darin, dass bei der virtuellen Deklination von $\delta = -(90^\circ - \varphi)$ der Halbtageswinkel 0° wird. Der lichte Tag dauert dann 0 Stunden und damit auch alle Temporalstunden. Eine solche virtuelle Sonne würde am Wahren Mittag nur kurz am Südpunkt des Horizonts erscheinen. Das ist auch in der Abbildung 26, „Kurven konstanter Temporalzeit auf der Himmelskugel“ zu erkennen.

Im astronomisch möglichen Deklinationbereich der Sonne von $-\varepsilon$ bis ε (= Ekliptikschiefe) können die temporalen Stundenlinien des Zifferblattes aber sehr gut durch Geraden angenähert werden. Zu diesem Zweck approximiert man jede Himmelskurve in ihrem Schnittpunkt mit dem Himmeläquator durch einen Grosskreis, welcher vom Richtungsvektor des Äquatorpunktes und vom Tangentialvektor an die Himmelskurve in diesem Punkt aufgespannt wird. Gemäss Gleichung 151 ist

$$\vec{s}_T(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) \cos(\tau_T - \tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \sin(\tau_T - \tau_{HT}) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}_A \quad (153)$$

Dabei ist $\tau_T = t_T \cdot \frac{\tau_{HT}}{6}$ und $\tau_{HT} = \arccos(-\tan(\delta)\tan(\varphi))$

und t_T die in Temporalstunden gemessene Zeit.

Den Tangentialvektor gewinnt man durch komponentenweise Ableitung des Richtungsvektors nach dem Parameter.

$$\vec{s}'_T(\delta) = \quad (154)$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\delta) \cos(\tau_T - \tau_{HT}) - \cos(\delta) \sin(\tau_T - \tau_{HT}) \frac{d}{d\delta}(\tau_T - \tau_{HT}) \\ -\sin(\delta) \sin(\tau_T - \tau_{HT}) + \cos(\delta) \cos(\tau_T - \tau_{HT}) \frac{d}{d\delta}(\tau_T - \tau_{HT}) \\ \cos(\delta) \end{bmatrix}_A$$

wobei

$$\frac{d}{d\delta}(\tau_T - \tau_{HT}) = \left(\frac{t_T}{6} - 1\right) \cdot \frac{\tan(\varphi)(1 + \tan^2(\delta))}{\sqrt{1 - \tan^2(\delta)\tan^2(\varphi)}}$$

ist. Für $\delta = 0$, also zur Tagundnachtgleiche, ist der Halbtageswinkel $\tau_{HT} = 90^\circ$ und der temporale Stundenwinkel $\tau_T = t_T \cdot 15^\circ$. Damit wird

$$\vec{s}_T(0) = \begin{bmatrix} \cos(t_T \cdot 15^\circ - 90^\circ) \\ \sin(t_T \cdot 15^\circ - 90^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \sin(t_T \cdot 15^\circ) \\ -\cos(t_T \cdot 15^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

ferner

$$\left. \frac{d}{d\delta} (\tau_T - \tau_{HT}) \right|_{\delta=0} = \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \cdot \frac{\tan(\varphi) (1 + \tan^2(0))}{\sqrt{1 - \tan^2(0)} \tan^2(\varphi)} = \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \cdot \tan(\varphi)$$

und somit

$$\begin{aligned} \vec{s}_T'(0) &= \begin{bmatrix} -\sin(t_T \cdot 15^\circ - 90^\circ) \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \cdot \tan(\varphi) \\ \cos(t_T \cdot 15^\circ - 90^\circ) \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \cdot \tan(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}_A \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \cos(t_T \cdot 15^\circ) \tan(\varphi) \\ \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \sin(t_T \cdot 15^\circ) \tan(\varphi) \\ 1 \end{bmatrix}_A \end{aligned}$$

Nun kann der approximierende Grosskreis bestimmt werden. Er liegt in der von $\vec{s}_T(0)$ und $\vec{s}_T'(0)$ aufgespannten Ebene. Das Vektorprodukt der beiden Vektoren

$$\vec{n}_T = \vec{s}_T(0) \times \vec{s}_T'(0) = \begin{bmatrix} -\cos(t_T \cdot 15^\circ) \\ -\sin(t_T \cdot 15^\circ) \\ \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \tan(\varphi) \end{bmatrix}_A$$

steht senkrecht auf dieser Grosskreisebene. Seine Zifferblattkomponenten sind

$$\vec{n}_T = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}_Z = M \cdot \begin{bmatrix} -\cos(t_T \cdot 15^\circ) \\ -\sin(t_T \cdot 15^\circ) \\ \left(\frac{t_T}{6} - 1 \right) \tan(\varphi) \end{bmatrix}_A \quad (155)$$

wobei M die Sonnenuhrmatrix ist. Aus ihnen gewinnt man gemäss Gleichung 78 den Richtungsvektor der Stundenlinie im Schnittpunkt mit dem Zifferblattäquator

$$\vec{r}_T = \begin{bmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{bmatrix}_Z \quad (156)$$

Das Vorgehen wird im folgenden Beispiel illustriert.

Beispiel 8

Als Beispiel vergleichen wir die temporale Stundenlinie zu $t_T = 4$ mit ihrer Approximation auf derselben Süduhr wie im Beispiel zu den babylonischen und italienischen Stunden. Die geographische Breite sei $\varphi = 47^\circ$.

Die Sonnenuhrmatrix ist

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.73135 & 0 & -0.68200 \end{bmatrix}$$

Der Ortsvektor der Schnittgeraden zwischen der Äquatorlinie und der temporalen Stundenlinie 4 ist

$$\vec{v} = \vec{s}_T(0) = \begin{bmatrix} \sin(60^\circ) \\ -\cos(60^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}_A$$

Daraus die Zifferblattkomponenten

$$\vec{v}_T = M \cdot \begin{bmatrix} 0.86603 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.59063 \\ 0.63337 \end{bmatrix}_Z$$

und schliesslich die gnomonische Projektion

$$\vec{v} = p(\vec{v}_T) = \begin{bmatrix} -0.78943 \\ -0.93252 \end{bmatrix}_Z$$

Der Normalenvektor auf die Ebene des approximierenden Grosskreises ist

$$\vec{n}_T = \begin{bmatrix} -\cos(60^\circ) \\ -\sin(60^\circ) \\ -\frac{1}{3}\tan(\varphi) \end{bmatrix}_A$$

Die Zifferblattkomponenten sind dann

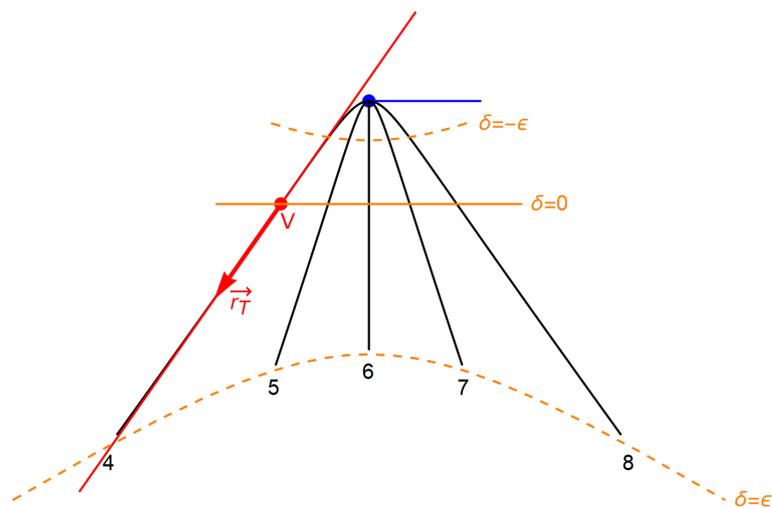
$$\vec{n}_T|_Z = M \cdot \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.86603 \\ -0.35745 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} 0.86603 \\ -0.60243 \\ -0.12189 \end{bmatrix}_Z$$

und daraus der Richtungsvektor der Approximationsgeraden auf dem Zifferblatt

$$\vec{r}_T = \begin{bmatrix} -0.60243 \\ -0.86603 \end{bmatrix}_Z$$

Graphisch sieht das dann so aus

Abbildung 28. Approximation einer Temporalen Stundenlinie durch eine Gerade



Die temporalen Stundenlinien sind schwarz, die Approximation der Linie 4 rot dargestellt. Der Bereich der astronomisch möglichen Sonnendeklinationen ist mit orange gestrichelten Linien abgegrenzt.

Im Bereich der astronomisch möglichen Sonnendeklinationen von $-\varepsilon$ bis ε ist die Approximation der temporalen Stundenlinie 4 im Rahmen der von einer Sonnenuhr zu erwartenden Genauigkeit sehr gut.

Mittlere Zeiten

Bis ins 19. Jahrhundert war die Zeit noch in (astronomischer) Ordnung. Man lebte nach der durch den Lauf der Sonne vorgegebenen, lokalen *wahren Ortszeit* (WOZ). Ein Tag war die Zeitspanne vom Sonnenhöchststand, dem wahren Mittag, eines Tage bis zum wahren Mittag des folgenden Tages.

Nun variieren aber die Längen dieser wahren Sonnentage wegen der Keplerschen Gesetze und wegen der Schiefstellung der Erdrotationsachse zur Ekliptikebene im Jahresverlauf merklich, und mit der Tageslänge eben auch die Dauer der Stunden, der Minuten und der Sekunden. Die Differenz zwischen dem längsten und dem kürzesten Sonnentag beträgt knapp 50 Sekunden. Solange man die Tageszeit mit der Sonnenuhr mass, spielten diese Schwankungen keine Rolle. Als dann aber genauere mechanische Uhren in Gebrauch kamen, störte das, denn die mechanischen Uhrwerke haben von ihrem Konstruktionsprinzip her einen gleichmässigen Lauf. Man hat daher eine über das Jahr gemittelte Tageslänge und damit auch mittlere Stunden, Minuten und Sekunden eingeführt. Das Zeitmass auf der Basis der mittleren Tageslänge nennt man *mittlere Ortszeit* (MOZ).

Dazu kam aber noch ein anderes Problem: Die MOZ war nach wie vor eine lokale Zeit, abhängig von der geographischen Länge des Standortes. Um das Problem etwas zu entschärfen, hat man 1884 auf der Meridiankonferenz in Washington die Erde in 24 Zeitzonen eingeteilt, in welchen je die MOZ eines Referenzmeridians als für die ganze Zone gültig deklariert wurde. Für unsere mitteleuropäische Normalzeit (= Winterzeit) ist dies der 15. Längengrad.

Mittlere Ortszeit

Weil die Abweichungen der wahren gegenüber dem mittleren Zeit sich jeweils für eine grössere Zeitspanne auf derselben Seite bewegen, summieren sich diese im Verlauf eines Jahres, weshalb die Zeitangaben in den beiden Zeitmasse bis zu rund einer Viertelstunde voneinander abweichen können. Die Differenz der auf dem natürlichen Sonnenlauf basierenden WOZ zur mittleren Ortszeit MOZ wird als *Zeitgleichung* (ZG) bezeichnet.

$$ZG = WOZ - MOZ \tag{157}$$

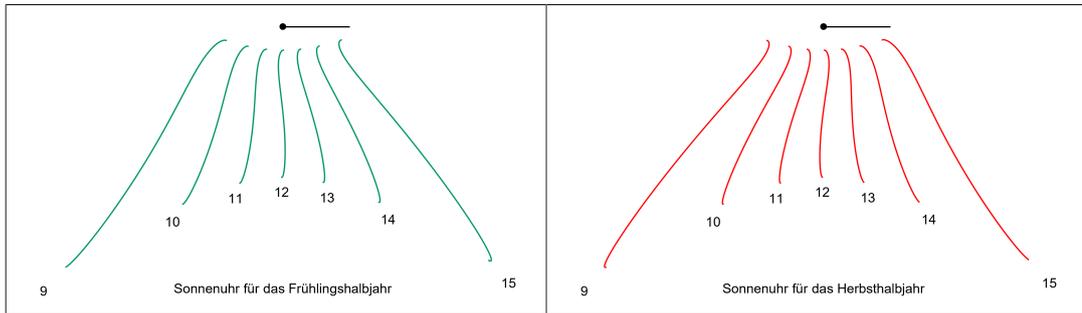
Die Bezeichnung «Gleichung» ist in unserer heutigen mathematischen Terminologie nicht ganz korrekt, handelt es sich doch um eine *Funktion*, die jedem Tag des Jahres den entsprechenden Korrekturwert zuweist. Wenn man die Werte der Zeitgleichung kennt, kann man aus der wahren Ortszeit, welche eine klassische Polstabsonnenuhr anzeigt, die mittlere Ortszeit nach der Formel

$$MOZ = WOZ - ZG \tag{158}$$

berechnen. Man sieht daher gelegentlich bei Polstabsonnenuhren eine Tafel, auf welcher die Werte der Zeitgleichung im Jahresverlauf tabelliert sind.

Sonnenuhren mit einem punktförmigen Gnomon können die mittlere Zeit auch direkt anzeigen. Die Werte der Zeitgleichung sind, wie die Deklinationen der Sonne, vom Jahrestag abhängig. Nun fällt der Punktschatten an einem Sommertag bei hoher positiver Deklination viel tiefer auf ein vertikales Zifferblatt, als an einem Wintertag mit negativer Deklination. Weil nun auch der Wert der Zeitgleichung an verschiedenen Tagen ebenfalls verschieden ist, erfährt der Stundenwinkel der Sonne (welcher proportional zur WOZ ist) eine der Zeitgleichung entsprechende Korrektur. Der Stundenwinkel um 12 Uhr MOZ ist also nicht 0, sondern je nach Jahreszeit ein wenig positiv oder negativ. Das hat zur Folge, dass die Stundenlinien, welche bei der wahren Ortszeit Geradenstücke sind, bei der mittleren Ortszeit gekrümmt sind, weshalb sie punktweise berechnet werden müssen. Weil aber die Sonne an zwei verschiedenen Tagen im Jahr, je einem im Frühlingshalbjahr zwischen Wintersonnenwende und Sommersonnenwende und einem im Herbsthalbjahr, dieselbe Deklination aufweist, die Zeitgleichung jedoch an diesen beiden Tagen verschiedene Werte haben, braucht es zwei verschiedene Sonnenuhren, je eine für jedes Halbjahr.

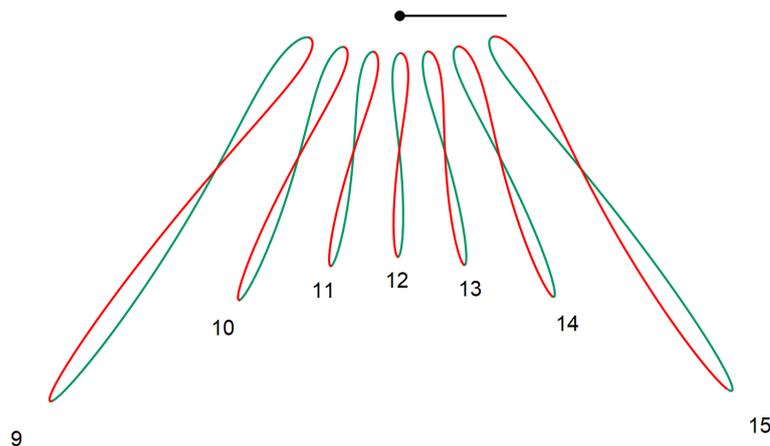
Abbildung 29. Vertikale Süduhren für die mittlere Ortszeit bei der geographischen Breite 47°



Der Punkt in der Mitte oben markiert den Fusspunkt des Gnomons auf dem Zifferblatt, die Strecke rechts davon seine Distanz über dem Zifferblatt.

In der Regel werden aber beide Uhren zu einer zusammengefasst. Dann ergänzen sich die Stundenlinie für das Frühlingshalbjahr und jene für das Herbsthalbjahr zu einer geschlossenen Kurven, die man *Analemma* oder *Zeitgleichungsschleife* nennt.

Abbildung 30. Vertikale Süduhr für die mittlere Ortszeit bei der geographischen Breite 47°



Der grüne Teil der Zeitgleichungsschleifen stellen die Stundenlinien für das Frühlingshalbjahr, der rote jene für das Herbsthalbjahr dar.

Um einen Punkt der Zeitgleichungsschleife zeichnen zu können, müssen wir den Richtungsvektor zur Sonne zur mittleren Tageszeit t_m bestimmen. Der Richtungsvektor ist aber durch den Stundenwinkel der Sonne und damit durch die wahre Ortszeit bestimmt. Die Differenz der wahren Ortszeit zur mittleren, also die Zeitgleichung, ist aber von der Jahreszeit abhängig. Wir drücken nun die Jahreszeit durch die mittlere Anomalie M der Erde aus. Diese ist der Winkel, den eine supponierte mittlere Erde, welche mit gleichmässiger Geschwindigkeit in einem Jahr die Sonne umkreist, von der Sonne her gesehen seit der Perihelppassage auf der Ekliptik zurückgelegt hat. Das kann man so interpretieren, dass für unsere Rechnung das Jahr mit dem Periheldurchgang (um den 3./4. Januar herum) statt am 1. Januar beginnt und statt in 365 resp 366 Tage in 360° eingeteilt wird.

In einem ersten Schritt berechnen wir die Anomalie V der wahren Erde, also unter Berücksichtigung der Keplerschen Gesetze und der Schiefstellung der Rotationsachse. Sie lässt sich aus der mittleren Anomalie wie folgt bestimmen

$$V = M + C(M) \tag{159}$$

Dabei ist $C(M)$ die Lösung der sogenannten Mittelpunktsgleichung. Ihre Berechnung erfordert die Lösung der Kepler-Gleichung, welche jedoch nichtlinear ist und nur numerisch angenähert werden

kann. Für kleine Exzentrizitäten der Bahnellipse, wie jene der Erdbahn mit $e \approx 0.0167$, lässt sich die Mittelpunktsgleichung mit einer für Sonnenuhrenanwendungen genügenden Genauigkeit bequem mit einer Reihenentwicklung approximieren.

$$C(M) = \left(2e \cdot \sin(M) + \frac{5}{4}e^2 \cdot \sin(2M) \right) \frac{180^\circ}{\pi} \quad (160)$$

Mit der wahren Anomalie ist die Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn in der Ekliptikebene bestimmt. Ein alternatives Mass ist die ekliptikale Länge λ , welche ebenfalls in der Ekliptikebene, jedoch vom Frühlingspunkt aus gemessen wird. Die Umrechnung ist eine einfache Skalenverschiebung, indem man die Länge des Perihels λ_p addiert.

$$\lambda = V + \lambda_p$$

Die Skalenverschiebung ist notwendig, weil das ekliptikale Koordinatensystem und die beiden Äquatorsysteme den Richtungsvektor zum Frühlingspunkt als ersten Basisvektor verwenden, was die Umrechnung vereinfacht. Die Lage des Perihels ist zeitlich nicht konstant. Seine ekliptikale Länge beträgt im Jahr J etwa

$$\lambda_p \approx 102.9373^\circ + (J - 2000) \cdot 0.0172^\circ$$

Nun ist die ekliptikale Breite der Erde definitionsgemäss 0. Die Ekliptikkomponenten des Richtungsvektors von der Sonne zur Erde sind daher

$$\vec{r}|_E = \begin{bmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}_E$$

Nun wechseln wir von der heliozentrischen zur geozentrischen Sichtweise. Von der Erde aus gesehen ist die Blickrichtung zur Sonne genau entgegengesetzt der Richtung von der Sonne zur Erde. Der Richtungsvektor von der Erde zur Sonne ist also der Gegenvektor des obigen.

$$\vec{s}|_E = - \begin{bmatrix} \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}_E$$

Diese werden nun gemäss Gleichung 18 in Komponenten der *sternfesten Äquatorbasis* umgerechnet

$$\vec{s}|_{A_s} = T_{EA_s} \cdot \vec{s}|_E \quad (161)$$

mit

$$T_{EA_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ 0 & \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (162)$$

wobei $\varepsilon \approx 23.44^\circ$ die Ekliptikschiefe ist. Der Übergang zu den *ortsfesten Äquatorkomponenten* geschieht mit der Matrix

$$T_{A_s A}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) & 0 \\ \sin(\Theta) & -\cos(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (163)$$

$$\vec{s}|_A = T_{A_s A}(\Theta) \cdot \vec{s}|_{A_s} \quad (164)$$

Dabei ist Θ die Sternzeit der Sonne. Sie ist die Summe der Rektaszension α und des Stundenwinkels τ . Für letzteren gilt $\tau = (t_m - 12) \cdot 15^\circ + \zeta$, wobei ζ die Stundenwinkeldifferenz ist, welche dem Zeitgleichungswert entspricht. Wir nennen ihn den *Zeitgleichungswinkel*. Er ist die Differenz zwischen der mittleren und der wahren Rektaszension der Sonne $\zeta = \alpha_m - \alpha$. Damit erhalten wir

$$\Theta = \alpha + \tau = \alpha + (t_m - 12) \cdot 15^\circ + \alpha_m - \alpha \quad (165)$$

Die mittlere Rektaszension α_m der Sonne wird vom Frühlingspunkt aus auf dem Himmelsäquator gemessen. Sie ist zahlenmässig gleich der mittleren ekliptikalen Länge L_S , welche ebenfalls vom Frühlingspunkt aus, jedoch auf der Ekliptik gemessen wird. L_S , wiederum ist gleich der der Summe der mittleren Anomalie M_S und der ekliptikalen Länge des Perihels. Damit wird die Sternzeit

$$\Theta = (t_m - 12) \cdot 15^\circ + M_S + A_P \quad (166)$$

Die mittleren Anomalie der Sonne ist um 180° grösser als jene der Erde, also $M_S = M + 180^\circ$. Damit erhalten wir nach Vereinfachung

$$\Theta = t_m \cdot 15^\circ + M + A_P \quad (167)$$

Aus den ortsfesten Äquatorkomponenten können schliesslich mit Hilfe der Sonnenuhrmatrix gemäss Gleichung 14 die Zifferblattkomponenten des Sonnenrichtungsvektors bestimmt werden.

$$\vec{s}|_Z = T_{AZ}(\varphi, D, I) \cdot \vec{s}|_A \quad (168)$$

Nun kann die Position des Gnomonschattens auf dem Zifferblatt gemäss Prozedur 2, „Abgekürztes Verfahren“ berechnet werden.

Um das Analemma für die mittlere Zeit t_m zu konstruieren, muss man also für eine geeignete Auswahl von mittleren Erdanomalien M über dem Bereich von 0° bis 360° das beschriebene Verfahren durchführen.

Wenn man aber gewisse Punkte auf dem Analemma mit einem bestimmten Tag markieren möchte, z.B. die Monatsanfänge oder die Tage des Eintritts der Sonne in ein neues Tierkreiszeichen, so muss man das Datum mit der mittleren Anomalie der Erde verknüpfen. Zu diesem Zweck muss man den Zeitpunkt des Periheldurchganges für das ausgewählte Jahr in Erfahrung bringen. Derzeit findet das Ereignis etwa um den 3./4. Januar herum statt. Dann bestimmt man die Anzahl Tage m , die am betrachteten Datum seit der Perihelpassage verfloren sind, und die zugehörige mittlere ekliptikale Länge ist gegeben durch

$$M = m \cdot \frac{360^\circ}{365.24} \quad (169)$$

Beispiel 9

Wir betrachten eine ebene, vertikale Sonnenuhr, deren Zifferblattebene um 10° gegen Osten abweicht, an einem Standort mit der geographischen Breite 47° . Der Gnomon befindet sich eine Einheit vor dem Zifferblatt. Es soll der Schatten des Gnomons auf dem Zifferblatt am 1. Mai um 16 Uhr mittlerer Ortszeit bestimmt werden, also ein Punkt des Analemmas für 16 Uhr MOZ.

Als Referenz nehmen wir das Jahr 2022 an (in der Mitte eines Schalljahreszyklus). In diesem Jahr passierte die Erde das Perihel am 4. Januar. Am 1. Mai waren seither $m = 117$ Tage verfloren. Die ekliptikale Länge war nach Gleichung 4 $A_P \approx 103.316^\circ$.

- Die mittlere Anomalie der Erde betrug

$$M = 117 \cdot \frac{360^\circ}{365.24} = 116.307^\circ \quad (170)$$

und die wahre daher gemäss Gleichung 159

$$V = 116.307^\circ + C(116.307^\circ) = 118.008^\circ \quad (171)$$

und schliesslich die ekliptikale Länge

$$A = 118.008^\circ + 103.316^\circ = 221.324$$

- Der Richtungsvektor von der Erde zur Sonne lautet nun in Ekliptikkomponenten

$$\vec{s}|_E = \begin{bmatrix} 0.75100 \\ 0.66031 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Transformationsmatrix in sternfeste Äquatorkomponenten ist

$$T_{EA_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91748 & -0.39778 \\ 0 & 0.39778 & 0.91748 \end{bmatrix}$$

Die sternfeste Äquatorkomponenten Komponenten also

$$\vec{s}|_{A_s} = \begin{bmatrix} 0.75100 \\ 0.60582 \\ 0.26266 \end{bmatrix}$$

Die Sternzeit ist $\theta = 60^\circ + 116.307^\circ + 103.316^\circ = 459.623^\circ$ und damit die Transformationsmatrix in ortsfeste Äquatorkomponenten

$$T_{A_s A} = \begin{bmatrix} -0.16716 & 0.98593 & 0 \\ 0.98593 & 0.16716 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit sind die Äquatorkomponenten des Sonnenvektors

$$\vec{s}|_A = \begin{bmatrix} 0.47176 \\ 0.84170 \\ 0.26266 \end{bmatrix}$$

Mit $\varphi = 47^\circ$, $D = -10^\circ$ und $I = 0^\circ$ wird die Sonnenuhrmatrix gemäss Gleichung 14

$$T_{AZ} = T_{HZ} \cdot T_{AH} = \begin{bmatrix} -0.12700 & -0.98481 & 0.11843 \\ 0.68200 & 0 & 0.73135 \\ 0.72024 & -0.17365 & -0.67164 \end{bmatrix}$$

mit welcher man nun die Zifferblattkomponenten der Sonnenrichtung berechnen kann.

$$\vec{s}|_Z = T_{AZ} \cdot \vec{s}|_A = \begin{bmatrix} -0.66089 \\ 0.70427 \\ 0.25929 \end{bmatrix} \quad (172)$$

- Schliesslich berechnen wir noch die Koordinaten der Projektion des Gnomons auf der Zifferblattebene gemäss Gleichung 66

$$U = (2.5488, -2.7161)$$

Die Zonenzeit

Unsere mitteleuropäische Normalzeit Zeit ist definiert als die mittlere Zeit des 15. Längengrades; die Sommerzeit ist die mittlere Zeit des 30 Längengrades. Die dadurch hervorgerufene *Zeitverschiebung* ist proportional zur Differenz zwischen der geographischen Länge λ des Standortes zur Länge λ_{ref} des Referenzmeridians. Ein Grad Längendifferenz ergibt dabei eine Zeitverschiebung von 4 Minuten.

Die Längendifferenz relativ zum Referenzmeridian ist ein Merkmal des Standortes, weshalb es Sinn macht, diesen Einfluss in der Standortmatrix zu berücksichtigen. Die Zeitverschiebung entspricht einer Drehung des Stundenwinkels um die Längendifferenz. Sei $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\text{ref}}$. Wenn nun die Sonne lokal denn Stundenwinkel τ , so ist er zur gleichen Zeit beim Referenzmeridian $\tau + \Delta\lambda$ (Man beachte, dass $\Delta\lambda$ für die Mitteleuropäische Normalzeit mit $\lambda_{\text{ref}} = 15^\circ$ westlich des 15. Längengrades negativ ist). Wenn also $\vec{s}|_A$ der lokale Richtungsvektor zur Sonne ist, so hat er zur gleichen Zeit beim Referenzmeridian die Komponenten

$$\vec{s}|_{A_r} = T_{AA_r}(\Delta\lambda) \cdot \vec{s}|_A \quad (173)$$

$$\text{mit } T_{AAr}(\Delta\lambda) = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\lambda) & -\sin(\Delta\lambda) & 0 \\ \sin(\Delta\lambda) & \cos(\Delta\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{s}|_{Ar}$ wird nun gemäss Gleichung 7 in Horizontkomponenten umgerechnet.

$$\vec{s}|_H = T_{AH}(\varphi) \cdot \vec{s}|_{Ar} = T_{AH}(\varphi) \cdot T_{AAr}(\Delta\lambda) \cdot \vec{s}|_A \quad (174)$$

$$\text{mit } T_{AH}(\varphi) = \begin{bmatrix} \sin(\varphi) & 0 & -\cos(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

Die beiden Faktormatrizen kann man zu einem Produkt zusammenfassen

$$T_{ArH}(\varphi, \Delta\lambda) = T_{AH}(\varphi) \cdot T_{AAr}(\Delta\lambda) \quad (175)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\Delta\lambda)\sin(\varphi) & -\sin(\Delta\lambda)\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \sin(\Delta\lambda) & \cos(\Delta\lambda) & 0 \\ \cos(\Delta\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\Delta\lambda)\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (176)$$

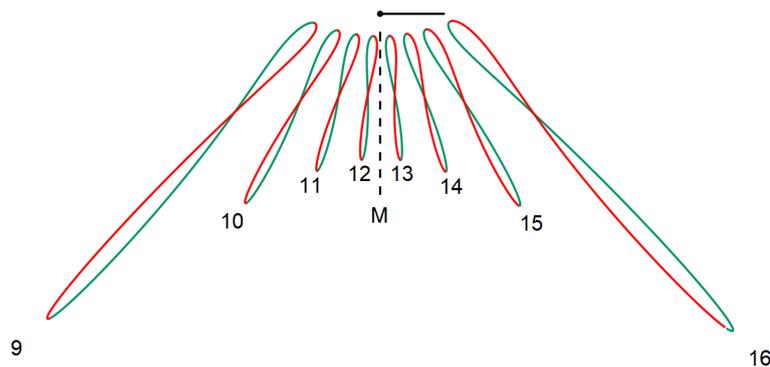
Für Sonnenuhren, welche die Zeit eines frei gewählten Referenzmeridians anzeigen sollen (muss nicht zwingend ein Zonenreferenzmeridian sein), verwendet man daher anstelle von Gleichung 7 diese *erweiterte Standortmatrix*. Man beachte, dass sie für $\Delta\lambda = 0$ zur gewöhnlichen Standortmatrix für Ortszeituhren degeneriert. Mit der erweiterten Standortmatrix wird auch die Sonnenuhrmatrix erweitert.

$$T_{ArZ}(\varphi, \Delta\lambda, D, I) = T_{HZ}(D, I) \cdot T_{Ar}(\varphi, \Delta\lambda) \quad (177)$$

Im Übrigen bleibt die Rechnung gleich, wie für die mittlere Ortszeit.

Im folgenden Bild ist eine vertikale Süduhr für die mitteleuropäische Normalzeit mit $\lambda_{\text{ref}} = 15^\circ$ am Standort Luzern mit der geographischen Länge $\lambda = 18.3^\circ$ und der geographischen Breite $\varphi = 47^\circ$ gezeichnet:

Abbildung 31. Vertikale Süduhr für die mitteleuropäische Normalzeit am Standort Luzern



Grüner Teil der Schleifen für das Frühlingshalbjahr von der Wintersonnenwende bis zur Sommersonnenwende, roter Teil für das Herbsthalbjahr. Zusätzlich zu den Stundenschleifen ist die mit M bezeichnete Mittaglinie (wahre Ortszeit 12 Uhr) für Luzern eingezeichnet.

A. Begriffe und Bezeichnungen der Vektorrechnung

Es geht hier nicht darum, einen Lehrgang der Vektorrechnung zu präsentieren, sondern darum, die in dieser Schrift verwendeten Begriffe zu klären und die Bezeichnungen zusammenzustellen.

1. Ein *Pfeil* ist mathematisch betrachtet ein Paar von Punkten, einem *Anfangspunkt* und einem *Endpunkt*.

Mit dem Begriff *Vektor* ist hier immer ein geometrischer gemeint, also die Menge aller Pfeile, die durch eine Parallelverschiebung in einen gegebenen Pfeil übergeführt werden können. Einen Vektor kann man mit einem beliebigen Element (=Pfeil) vollständig beschreiben. Die Elemente nennt man in diesem Zusammenhang *Repräsentanten* des Vektors. Symbole, welche einen Vektor bezeichnen, grenze ich mit einem darüber geschriebenen Pfeilsymbol von den Symbolen für gewöhnliche Zahlen (sog. *Skalare*) ab, z.B. \vec{v}

Alle Pfeile, welche Repräsentanten desselben Vektors sind, haben dieselbe Länge und dieselbe Richtung. Mit $|\vec{v}|$ bezeichnet man die (euklidische) *Norm* oder *Länge* des Vektors; das ist die Länge eines beliebigen Repräsentanten. Es gibt auch einen Vektor der Länge 0. Er heisst *Nullvektor* und man bezeichnet ihn mit $\vec{0}$.

Mit Ausnahme des Nullvektors haben alle Vektoren eine *Richtung*, nämlich die Richtung vom Anfangspunkt zum Endpunkt eines beliebigen Repräsentanten.

2. Fundamental für Vektoren ist, dass sie addiert und mit einer Zahl multipliziert werden können. Sind \vec{v} und \vec{w} zwei Vektoren, so ist

$$\vec{v} + \vec{w}$$

jener Vektor, von dem man einen Repräsentanten wie folgt konstruieren kann: Man wählt einen beliebigen Repräsentanten von \vec{v} und jenen Repräsentanten von \vec{w} , dessen Anfangspunkt mit dem Endpunkt des ersten zusammenfällt. Dann ist jener Pfeil, dessen Anfangspunkt der Anfangspunkt des \vec{v} -Repräsentanten und dessen Endpunkt der Endpunkt des \vec{w} -Repräsentanten ist, ein Repräsentant von $\vec{v} + \vec{w}$.

Ist ferner s eine Zahl, so ist

$$s \cdot \vec{v}$$

jener Vektor, dessen Länge das $|s|$ -fache der Länge von \vec{v} beträgt, und dessen Richtung für positive s identisch mit der Richtung von \vec{v} , und für negative s die Gegenrichtung von \vec{v} ist.

Mit $-\vec{v}$ bezeichnet man den sogenannten *Gegenvektor* von \vec{v} . Er hat dieselbe Länge wie \vec{v} und ist parallel zu diesem, weist jedoch in die Gegenrichtung.

Die *Differenz* von zwei Vektoren ist wie folgt definiert

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$$

Für das Rechnen mit Summen und Differenzen von Vektoren sowie von Produkte von Vektoren mit einer Zahl gelten dieselben Regeln wie für das Rechnen mit gewöhnlichen Zahlen. Man beachte, dass es keine Division durch Vektoren gibt.

Eine Summe von mit gewissen Zahlen multiplizierten Vektoren

$$s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + s_n \cdot \vec{v}_n$$

heisst eine *Linearkombination* der Vektoren.

Wenn sich in einer Menge von Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ mindestens einer als Linearkombination der übrigen darstellen lässt, so heissen die Vektoren *linear abhängig*, andernfalls *linear unabhängig*.

3. In der geometrischen Ebene sind mehr als zwei Vektoren, im geometrischen Raum mehr als drei stets linear abhängig. Die maximal mögliche Anzahl von linear unabhängigen Vektoren heisst die

Dimension eines Raumes. Die geometrische Ebene nennt man daher zweidimensional, den geometrischen Raum dreidimensional (mathematisch abstrakte Räume können auch höhere Dimensionen haben).

Eine *Basis* der Ebene ist ein Paar von linear unabhängigen Vektoren.

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$$

Eine Basis im Raum ist ein Tripel von linear unabhängigen Vektoren.

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

Wenn die Basisvektoren gegenseitig senkrecht stehen, heisst die Basis *orthogonal*, wenn sie zusätzlich alle die Länge 1 haben, *orthonormal*.

Wenn die Vektoren einer ebenen Basis wie Daumen und Zeigfinger der rechten Hand orientiert sind, heisst die Basis *rechtsorientiert*, andernfalls *linksorientiert*. Wenn die Vektoren einer räumlichen Basis wie Daumen, Zeigfinger und Mittelfinger der rechten Hand orientiert sind, heisst sie *rechtsorientiert*, andernfalls *linksorientiert*.

4. Ein zentraler Satz der Vektorrechnung sagt, dass jeder Vektor eines Raumes eindeutig als Linearkombination der Vektoren einer Basis dargestellt werden kann. Mit den obigen Bezeichnungen sind also Zahlen v_1, v_2, v_3 eindeutig bestimmt, sodass

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{b}_1 + v_2 \cdot \vec{b}_2 + v_3 \cdot \vec{b}_3$$

Die Zahlen v_1, v_2, v_3 heissen die (skalaren) *Komponenten* von \vec{v} bezüglich der Basis B . Im Sinne einer Abkürzung schreibe ich die obige Darstellung als Spaltenmatrix mit eckigen Klammern, wobei die verwendete Basis als Index angegeben wird.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_B \tag{A.1}$$

Ich nenne diese Darstellung das *Komponententripel* des Vektors bezüglich der Basis B . Zu verschiedenen Basen sind die Komponenten eines bestimmten Vektors natürlich verschieden. Trotzdem stellen beide Komponentenerlegungen denselben Vektor dar.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}_B$$

Die Komponentenerlegung von \vec{v} bezüglich einer bestimmten Basis A bezeichne ich mit

$$\vec{v}|_A$$

Wenn die verwendete Basis aus dem Kontext klar oder unwesentlich ist, kann der Index auch weggelassen werden.

5. Eine Basis B bildet zusammen mit einem *Ursprung* O ein *Koordinatensystem*. Der Ursprung ist ein fest vorgegebener Bezugspunkt. Gestützt auf einen Ursprung kann man jeden Punkt P des Raumes mit Hilfe eines Vektors beschreiben, nämlich jenes Vektors, dessen Repräsentant mit dem Anfangspunkt O den Endpunkt P hat. Dieser Vektor heisst der *Ortsvektor* von P .

In einem Koordinatensystem K ist jeder Punkt eindeutig durch seine *Koordinaten* bestimmt. Diese sind identisch mit den Komponenten seines Ortsvektors. Zur deutlichen Unterscheidung eines Punktes P von seinem Ortsvektor \vec{p} schreibe ich die Koordinaten von P in Zeile, eingeschlossen in runden Klammern, also

$$P = (p_1 \ p_2 \ p_3)_K \tag{A.2}$$

Auch hier wird der Index weggelassen, wenn klar ist, auf welches Koordinatensystem sich die Komponenten beziehen.

6. Mit Vektoren, die in Komponenten bezüglich derselben Basis gegeben sind, lässt sich bequem rechnen. Sind etwa

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_A \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_A \quad \text{und } c \text{ eine beliebige Zahl,}$$

dann sind die Komponenten der Summe durch folgende einprägsame Formeln gegeben

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}_A \tag{A.3}$$

und das Produkt mit einer Zahl

$$c \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ c \cdot v_3 \end{bmatrix}_A \tag{A.4}$$

Damit wird es überhaupt erst möglich, Vektorrechnung mit einem Computer auszuführen.

7. Das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ von zwei Vektoren ist eine Zahl, und zwar das Produkt aus den beiden Längen und des Kosinus des Zwischenwinkels φ .

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) \tag{A.5}$$

Das Skalarprodukt ist 0, wenn einer der beiden der Nullvektor oder der Kosinus des Zwischenwinkels 0 ist. Letzteres ist der Fall, wenn $\varphi = 90^\circ$. Eine wichtige Anwendung des Skalarproduktes ist es daher, zu formulieren, dass zwei Vektoren, von welchen keiner der Nullvektor ist, senkrecht aufeinander stehen.

Wenn die Vektoren in Komponenten einer *orthonormalen* Basis B (z.B. in der Zifferblattbasis) dargestellt sind, so ist das Skalarprodukt besonders einfach zu berechnen, gilt doch dann

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_B \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_B = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 \tag{A.6}$$

8. Wenn in einer Anwendung – wie beispielweise bei Sonnenuhren – verschiedene Basen verwendet werden, so kann man die Komponenten mit Hilfe einer Matrixmultiplikation von einer Basis in eine andere umrechnen. Wenn A und B zwei Basen sind, so gilt

$$\vec{v}|_B = T_{AB} \cdot \vec{v}|_A \tag{A.7}$$

Wobei T_{AB} jene Matrix ist, deren Spalten die Komponenten der Basisvektoren von A bezüglich der Basis B sind. Wenn also die Basisvektoren von A in der Basis B die Komponenten

$$\vec{a}_1|_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}_B, \quad \vec{a}_2|_B = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}_B \quad \text{und} \quad \vec{a}_3|_B = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}_B$$

haben, so ist die Transformationsmatrix

$$T_{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Das Produkt einer Matrix mit dem Komponententripel eines Vektors ist eine Komponententripel, das man wir folgt berechnet:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \cdot v_1 + m_{12} \cdot v_2 + m_{13} \cdot v_3 \\ m_{21} \cdot v_1 + m_{22} \cdot v_2 + m_{23} \cdot v_3 \\ m_{31} \cdot v_1 + m_{32} \cdot v_2 + m_{33} \cdot v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

9. Die *inverse Matrix* T_{AB}^{-1} vermittelt die Rücktransformation

$$\vec{v}|_A = T_{AB}^{-1} \cdot \vec{v}|_B \quad (\text{A.10})$$

Im allgemeinen Falle ist die Berechnung der Inversen einer Matrix recht aufwändig. Wenn aber A und B orthonormale Basen sind, was bei den drei für Sonnenuhren wichtigen Basen, die Äquator-, Horizont- und Zifferblattbasis der Fall ist, dann ist die Inverse besonders einfach zu bestimmen, ist sie doch gleich der transponierten Matrix.

Die *Transponierte* M^T einer Matrix M ist jene Matrix, deren Zeilen die Spalten von M resp. deren Spalten die Zeilen von M sind. Es gilt also

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

10. Das *Vektorprodukt* $\vec{p} = \vec{v} \times \vec{w}$ von zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} im dreidimensionalen Raum ist ein Vektor, der wie folgt definiert ist:

- Die Länge des Vektors ist gleich dem Produkt der Längen der beiden Faktoren multipliziert mit dem Sinus ihres Zwischenwinkels φ .

$$|\vec{p}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\varphi) \quad (\text{A.12})$$

- Der resultierende Vektor \vec{p} steht senkrecht zu den beiden Faktoren
- Die Vektoren \vec{v} , \vec{w} und \vec{p} bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Wenn die Faktoren in Komponenten bezüglich einer orthonormalen, rechtsorientierten Basis gegeben sind, so werden die Komponenten des Vektorproduktes wie folgt berechnet:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Ist die Basis zwar orthonormal, jedoch linksorientiert, so stellt das letzte Tripel die Komponenten $-\vec{p}$ dar.

Im zweidimensionalen Raum gibt es kein Vektorprodukt.

Literaturverzeichnis

[Meyer] Jörg Meyer. *Die Sonnenuhr und ihre Theorie*. Copyright © 2008 Wissenschaftlicher Verlag Harry Deutsch GMBH, Frankfurt am Main.

[Rohr] René R. J. Rohr. *Die Sonnenuhr*. Copyright © 1982 Verlag Georg D. W. Callwey, München.

[Zenkert] Arnold Zenkert. *Faszination Sonnenuhr*. Copyright © 2009 Wissenschaftlicher Verlag Harry Deutsch GMBH, Frankfurt am Main.

[Philipp] Hugo Philipp, Daniel Roth, Willy Bachmann. *Sonnenuhren Deutschland und Schweiz*. Copyright © 1994 Deutsche Gesellschaft für Chronometrie.

[Montenbruck] Oliver Montenbruck. *Grundlagen der Ephemeridenrechnung*. Copyright © 2009 Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg.

[Aulenbacher] Gerhard Aulenbacher. *Clavius und die Temporalstunden*. Deutsche Gesellschaft für Chronometrie. *Mitteilungen Nr. 146 - Sommer 2016*. 12 - 14.